A kettes számrendszerben felírt egész számok közül csak azokban nem fordul elő zérus számjegy, amelyekben minden jegy 1-es, tehát amelyek 1-gyel kisebbek 2-nek valamely (pozitív egész kitevős) hatványánál, azaz 2^s-1 alakúak, ahol $s=2$, 3, ... (az 1-es jegyek száma, az $s=1$ esetet azonban kizártuk). Eszerint a bizonyítandó állítást így is kimondhatjuk: semmilyen $a(>1)$ egész számnak $n(>1, \text{egész})$ kitevőjű hatványa nem lehet egyenlő 2^s-1-gyel.

Az $a^n=2^s-1$ egyenlőséget csak páratlan a-kra kell megcáfolnunk, hiszen a jobb oldal páratlan, páros szám vizsgálandó hatványai viszont maguk is párosak.

α) Páratlan n esetén az egyenlőség így alakítható:

$$2^s=a^n+1^n=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\ldots+a^2-a+1).$$

Itt a jobb oldali második zárójelben n tag áll, mindegyikük páratlan, tehát a zárójelben páratlan szám áll, és az az egyenlőség szerint osztója 2^s-nek. 2^s-nek viszont nincs más páratlan osztója, mint az 1, csak az lehetne tehát az a tagú zárójel értéke. Ámde a zárójelbeli kifejezés így írható:

$$(a^{n-1}-a^{n-2})+(a^{n-3}-a^{n-4})+\ldots+(a^2-a)+1>1,$$

hiszen a kéttagúak száma legalább 1 és mindegyik kéttagú pozitív. Ellentmondásra jutottuk a föltevésből.

β) Páros n esetén $n=2m$ jelöléssel

$$a^n+1=(2b+1)^n+1=\left[(2b+1)^2\right]^m-1^m+2=\left\{(2b+1)^2-1\right\}A+2=4B+2,$$

ahol A az egyenlő kitevőjű hatványok különbségére ismert azonosság alapján egész szám, és $B=(b^2+b)A$ ugyancsak egész. Eszerint a bal oldal már 4-gyel sem osztható maradék nélkül.

Mindezek szerint $a^n=2^s-1$ a tett föltevések mellett lehetetlen, az állítás helyes.

Sziky Csilla (Nyíregyháza, Krúdy Gy. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Számos dolgozat az itt fölhasznált tételeknél jóval „erősebb” binomiális tétel alapján bizonyította az állítást.