Előzetes megjegyzés. A kérdést természetesen csak arra az esetre vizsgálhatjuk, ha a logaritmusok értelmezve vannak, más szóval

az adott logaritmusok alapszámára teljesül $x > 0$, $x \neq 1$, ill. $y > 0$, $y \neq 1$;

a keresett logaritmus alapszámára ezen felül teljesül $xy \neq 1$

a kérdéses z számra is $z > 0$; továbbá $z \neq 1$, hiszen $z = 1$ esetén adatok nélkül is tudjuk, hogy 0 az eredmény.

I. megoldás. Az alapszám megváltoztatására vonatkozó logaritmusazonosságok közül elég felhasználni a „fölcserélési tételt”:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}.$$

Eszerint és más azonosságokkal:

$$\log_{xy} z = \frac{1}{\log_z xy} = \frac{1}{\log_z x + \log_z y} = \frac{1}{\dfrac{1}{\log_x z} + \dfrac{1}{\log_y z}} = \frac{(\log_x z)\cdot(\log_y z)}{\log_x z + \log_y z}.$$

Az előrebocsátottak értelmében a végzett alakítások megengedettek.

Érdemes megemlíteni néhány speciális esetet.

I. ha $x = y$, akkor

$$\log_{x^2} z = \frac{1}{2}\log_x z;$$

II. ha $x = z$, akkor

$$\log_{xy} x = \frac{\log_y x}{1 + \log_y x};$$

III. ha $x = 1/z$, akkor

$$\log_{xy} \frac{1}{x} = -\frac{\log_y z}{-1 + \log_y z} = \frac{\log_y z}{1 - \log_y z}$$

(megjegyezve, hogy $xy \neq 1$ folytán $y \neq z$, a nevező tehát $\neq 0$).

Mayer Zsuzsa (Pécs, Széehenyi I. Gimn., III. o. t.)
Vladár Károly (Kiskunhalas, Szilády Á. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Akik nem idegenkednek a törtektől, nem legsürgősebb dolguk a törtek lehető „eltávolítása”, azok számára így egyszerűbb a fenti eredmény:

$$\frac{1}{\log_{xy} z} = \frac{1}{\log_x z} + \frac{1}{\log_y z}.$$

2. A logaritmus jól begyakorolt azonosságai helyett célhoz érünk a logaritmus definíciójával is, és így fölelevenedik, hogy a logaritmusazonosságok a definíció alapján csupán más alakjai a hatványazonosságoknak.

II. megoldás. Vezessünk be rövid jelöléseket az adatokra és az ismeretlenre:

$$\log_x z = a,\ \log_y z = b,\ \log_{xy} z = c.$$

Így a logaritmus definíciója szerint:

$$z = x^a = y^b = xy^c,$$

amiből

$$x = z^{\frac{1}{a}}, \quad y = z^{\frac{1}{b}},$$

tehát

$$z = \left(z^{\frac{1}{a}} \cdot z^{\frac{1}{b}}\right)^c = z^{c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \quad (\neq 1),$$

innen pedig a kitevőket egybevetve

$$1 = c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{c(a+b)}{ab}, \qquad c = \frac{ab}{a+b}, \qquad \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$