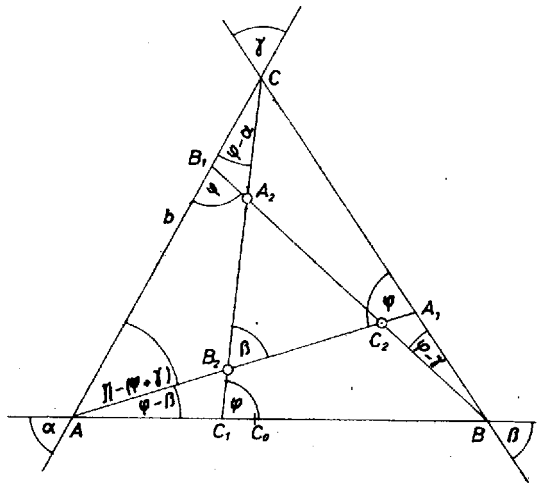
A háromszög alkotórészeit a szokás szerint jelöljük. Mivel α és β hegyesszögek, azért A és B a C-ből húzott magasság C_0 talppontjának két oldalán van, és $CC_1B\sphericalangle=\varphi<90^\circ$ miatt C_1 az AC_0 szakasz belső pontja.



A külső szög tétele alapján $ACC_1\sphericalangle=\varphi-\alpha$, és mivel az alakzat előállításában a betűk szerepe ciklikusan szimmetrikus, $BAA_1\sphericalangle=\varphi-\beta$, A_1 a BC szakaszon van, és B_2 a háromszög belsejében adódik. Továbbá az AC_1B_2 háromszögben $AB_2C_1\sphericalangle=A_1B_2C\sphericalangle=\beta$, az AB_2C háromszögben $B_2AC\sphericalangle=\pi-\varphi-\gamma$, és ezekkel

$$\begin{aligned} B_2C&=\frac{AC}{\sin(\pi-\beta)}\sin(\varphi+\gamma)=2r\sin(\varphi+\gamma),\\ B_2A&\phantom{=\frac{AC}{\sin(\pi-\beta)}\sin(\varphi+\gamma)}=2r\sin(\varphi-\gamma),\end{aligned}$$

ahol $2r$ az ABC háromszög köré írt kör átmérője. Az utóbbiból ciklikus betűcserével

$$A_2C=2r\sin(\varphi-\gamma).$$

Képezzük a következő különbséget:

$$B_2C-A_2C=2r(\sin(\varphi+\gamma)-\sin(\varphi-\gamma))=4r\cos\varphi\sin\gamma=2AB\cos\varphi;$$

ez pozitív, tehát A_2 a B_2C szakaszon van. A ciklikus betűcsere adja, hogy C_2 az A_2B-n, B_2 a C_2A szakaszon van, tehát az $A_2B_2C_2=H_2$ háromszög B_2-nél levő szöge azonos az $A_1B_2C\sphericalangle=\beta$-val. Ciklikus cserével $A_2C_2B_2\sphericalangle=\gamma$, tehát a vizsgálandó H_2 hasonló az eredeti $ABC=H$ háromszöghöz – A_2 az A-nak megfelelő csúcs s i. t. –, és annak a belsejében van.

Azt is kaptuk fent, hogy $A_2B_2=AB\cdot 2\cos\varphi$, tehát H_2 a H-nak (lineárisan) $2\cos\varphi$-szeresre kicsinyített képe. Ekkor pedig H_2-nek t_2 területe a H-nak t területéből $4\cos^2\varphi$-vel való szorzással adódik. Evvel feladatunkat lényegében megoldottuk.

Kifogás merülhet föl mégis, hogy t nem határozza meg egyértelműen a H-t. Ezt kiküszöbölhetjük úgy, hogy t helyére beírjuk a területnek bármely meghatározó adathármassal való kifejezését, pl.

$$t_2=2ab\sin\gamma\cos^2\varphi.$$

A H-nak legnagyobb szöge legalább 60°, s mivel ennél φ nagyobb, azért $0<\cos\varphi<1/2$, így a $4\,cos^2\varphi$ szorzószám kisebb 1-nél. (Ez abból is adódik, hogy – mint már kimondtuk – H_2 a H belsejében van.)

Ha φ tart a 90°-hoz, H_2 összezsugorodik a magasságpontra.

Kiss Emil (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)