

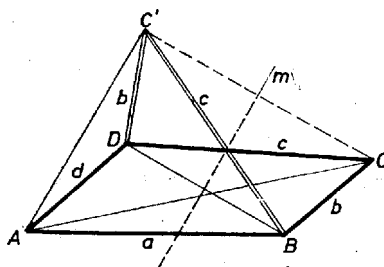
Jelöljük a szóban forgó négyszög csúcsait A, B, C, D betűvel úgy, hogy $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ legyen. A konvexitás alapján az AC átló a négyszög belsejében halad, így

$$2t = 2t_1 + 2t_2,$$

ahol t_1 az ACB háromszög területe, t_2 pedig az ACD -é. Mármost

$$2t_1 \leq ab, \quad 2t_2 \leq cd,$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha az a és b , illetve c és d oldal merőlegesen áll egymásra. Ezzel beláttuk I. helyességét. (Itt a konvexitásból csak azt használtuk föl, hogy B és D az AC -nek két oldalán van, vagyis ez áll az I.-ben összeszorozott a, b és c, d oldalpárokra is.)



Mármost ha I.-ben az egyenlőség érvényes, akkor B -nél is, D -nél is derékszög van, ezért B és D az AC átló mint átmérő fölötti Thalész-körön vannak, tehát négyszögünk húrnégyszög.

A II. állítás csak abban tér el az I.-től, hogy benne – amahoz képest – b és c fel van cserélve. Ezt visszavezethetjük az I.-re. Vegyük C -nek C' tükörképét a BD átló m felező merőlegesére, ekkor az $ABC'D = N'$ négyszög egymás utáni oldalai a, c, b, d , és területe is t , hiszen $CC' \parallel BD$, tehát a BDC és BDC' háromszögek egyenlő területűek, és t -t bármelyikükből a BDA háromszög területének hozzáadásával kapjuk, mert C a BD -nek A -t nem tartalmazó partján van a konvexitás folytán, és ugyanott van C' is. Így I.-ből következik a II. állítás. (Megjegyezzük, hogy az $ABC'D$ -ről nem tudjuk, hogy konvex, az AC' átló haladhat kívül is, itt viszont, csak az volt a lényeges, hogy BD a belsejében halad.)

És ha azt tudjuk, hogy a II. állításban érvényes az egyenlőség jele, akkor az iméntihez hasonlóan A, B, C' és D ebben a sorrendben egy kör kerületén vannak, és ezen C is rajta van mint C' -nek tükörképe a BD húr felező merőlegesére, ez ugyanis átmérő. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Fűrő András (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A feladat természetesen nem azt állítja, hogy húrnégyszögben $ab + cd$ és $ac + bd$ mindegyike megadná a terület 2-szeresét; csak azt, hogy ha a húrnégyszögben két szög derékszög, akkor a szemben fekvő derékszögeket bezáró oldalakból képezett szorzatok összege $2t$. Mindkét képlet csak akkor helyes, ha a fenti C' azonos C -vel, azaz $b = c$ és ekkor persze $a = d$ is fennáll, vagyis ha a négyszög húrdeltoid. (Ekkor viszont nem érdemes beszélni két képletről.)