

$$(1) \quad 1 \cdot 2 + 3, \quad 4 \cdot 5 + 6, \quad \dots, \quad (3k-2)(3k-1) + 3k, \quad \dots$$

Az állítás a sorozatnak minden egyes tagjára érvényes, vagyis az *egytényezős* szorzatokra:

$$(2) \quad (3k-2)(3k-1) + 3k = 9k^2 - 6k + 2 = (3k-1)^2 + 1^2.$$

Erre tekintettel először azt bizonyítjuk általában, hogy két kéttagú négyzetösszeg szorzata írható kéttagú négyzetösszeg alakjában. Valóban:

$$(3) \quad \begin{aligned} (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2) &= a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 \pm 2a\alpha b\beta + a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = \\ &= \begin{cases} (a\alpha + b\beta)^2 + (a\beta - b\alpha)^2, \\ (a\alpha - b\beta)^2 + (a\beta + b\alpha)^2, \end{cases} \end{aligned}$$

vagyis a kívánt előállítás általában 2-féleképpen is lehetséges. Ehhez sorozatunk esetében már csak két dolgot kell hozzátennünk:

Mivel a, b, α, β szerepére egész számokat gondolunk, azért a (3) eredmények mindnégy zárójeles kifejezése egész szám.

Mivel $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C$, azért megállapításunk a sorozat akárhány elemének szorzatára érvényes.

Megjegyzések. 1. Mivel a 0 is egész szám, azért gondolhatunk arra is, hogy a szóban forgó szorzat esetleg maga egy négyzetszám. Ez adódik mindjárt, ha a sorozat egy elemét önmagával szorozzuk, amit a feladat nem zár ki. Megmutatjuk ezért, hogy ha az (1) sorozat két *különböző* elemét szorozzuk össze, akkor a (2)-re támaszkodó (3) előállítások alapjai közt nincs 0.

A (2) előállítás szerint számaink $a^2 + 1$ alakúak, ezért $b = \beta = 1$ esetére (3) így alakul:

$$(a^2 + 1)(\alpha^2 + 1) = (a\alpha + 1)^2 + (a - \alpha)^2 = (a\alpha - 1)^2 + (a + \alpha)^2,$$

ámde különböző elemeket véve $a - \alpha \neq 0$ és $a\alpha - 1 \neq 0$ (hiszen elég nem negatív számokra gondolni a, b, α, β szerepében).

2. A (3) alatti két előállításból tulajdonképpen elég lenne csak az egyiket felírni, hiszen α és β fölcserélésével (vagy a és b cseréjével) egymásba mennek át, ami viszont a bal oldalt nem változtatja meg. Csak az emberi figyelem természetére gondolva írtuk ki: a tetszetős azonosság szemlélete közben megfélekedezünk, hogy a bal oldal tényezőire alkalmazható a kommutatív törvény. Az egyezően kiejtett latin és görög betűk nem hoznak létre megfeleltetést a két négyzetösszeg tagjai között.

3. Vannak az (1) sorozatnak olyan elemei, amelyek (2)-től különböző módon is írhatók négyzet összegként: $7 \cdot 8 + 9 = 65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$, $16 \cdot 17 + 18 = 290 = 17^2 + 1^2 = 13^2 + 11^2$, az utóbbi alakokra természetesen nem érvényes előbbi állításunk. Ezek magyarázata a $65 = 5 \cdot 13$ és $290 = 2 \cdot 145$ előállítás, ahol 13, 2 és 145 nem tagjai sorozatunknak, de $13 = 3^2 + 2^2$, $2 = 1^2 + 1^2$, $145 = 12^2 + 1$, és így (3) alkalmazható, sőt fennáll $145 = 5 \cdot 29 = (2^2 + 1^2)(5^2 + 2^2)$ is. Az érdeklődők számos további érdekességet találhatnak.

4. A sorozatunk elemeiből képzett szorzatok kéttagú négyzetösszeg felbontásainak számára a fentiek szerint az sejthető, hogy legalább 2^{n-1} , ahol n az összeszorozott elemek száma. Ajánljuk az érdeklődőknek megvizsgálásra pl. az $5 \cdot 26 \cdot 65$ szorzatot.