

$$(1) \quad \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BD}\right)^2 + \left(\frac{AD}{BC}\right)^2 > 1.$$

Azt fogjuk belátni, hogy az állítás azzal a megszorítással is igaz – amennyiben (1) két oldala közt egyenlőséget is megengedünk –, ha A helyére a BCD sík tetszés szerinti pontját írjuk. Ha ugyanis A vetülete e síkon A' , akkor – valódi tetraéder, azaz nem egy síkban levő 4 csúcs esetében – $A'B < AB$ és $A'C < AC$ és $A'D < AD$, tehát A' -t írva A helyére, (1) bal oldala csökken; másrészt a BCD sík bármely pontja lehet egy $ABCD$ tetraéder negyedik csúcsának vetülete.

A háromszögeknél szokásos betűzésre áttérve ezt fogjuk tehát bizonyítani:

$$(2) \quad \frac{PA^2}{BC^2} + \frac{PB^2}{CA^2} + \frac{PC^2}{AB^2} \geq 1,$$

ahol A, B, C egy valódi – azaz el nem fajult – háromszög csúcsai, P pedig a háromszög síkjának tetszés szerinti pontja.

Legyenek egy derékszögű koordináta-rendszerben $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ és $P(u, v)$, továbbá legyen rövidítésül

$$\frac{1}{BC^2} = \frac{1}{a^2} = \alpha, \quad \frac{1}{CA^2} = \frac{1}{b^2} = \beta, \quad \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{c^2} = \gamma.$$

Ekkor (2) bal oldala így alakítható:

$$(3) \quad \begin{aligned} & \alpha[(u - x_A)^2 + (v - y_A)^2] + \beta[(u - x_B)^2 + (v - y_B)^2] + \gamma[(u - x_C)^2 + (v - y_C)^2] = \\ & = (\alpha + \beta + \gamma)(u^2 + v^2) - 2u(\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C) - 2v(\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C) + \\ & \quad + \alpha(x_A^2 + y_A^2) + \beta(x_B^2 + y_B^2) + \gamma(x_C^2 + y_C^2) = \\ & = (\alpha + \beta + \gamma) \left[\left(u - \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \right)^2 + \left(v - \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \right)^2 \right] + \left\{ \alpha(x_A^2 + y_A^2) + \right. \\ & \quad \left. + \beta(x_B^2 + y_B^2) + \gamma(x_C^2 + y_C^2) - \frac{(\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C)^2}{\alpha + \beta + \gamma} - \frac{(\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C)^2}{\alpha + \beta + \gamma} \right\}. \end{aligned}$$

Rögzített A, B és C , valamint α, β, γ értékek mellett, P helyzetét viszont változtatva, itt csak u és v változik, vagyis a kifejezés első tagja. E tag legkisebb értéke 0, ti. akkor, ha

$$(4) \quad u = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \quad \text{és} \quad v = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

hiszen α, β, γ pozitív számok, ezért összegük is pozitív. Így pedig állításunkhoz elég azt belátnunk, hogy (3) további – a kapcsos zárójelben álló – tagjainak összege nem kisebb 1-nél.

Ennek az összegnek az átrendezésével az α^2 -et, β^2 -et és γ^2 -et tartalmazó tagok összege 0, az $\alpha\beta$ szorzatot tartalmazó tagok, kellő alakítással

$$(5) \quad \frac{\alpha\beta[(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2]}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{\alpha\beta \cdot AB^2}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{\frac{\alpha\beta}{\gamma}}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

A betűk szerepe szimmetrikus, a $\beta\gamma$ és a $\gamma\alpha$ szorzatot tartalmazó tagok hasonlóan alakíthatók, eszerint a (4) koordinátákkal meghatározott pontra vonatkozóan (3) értéke

$$\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma\alpha}{\beta} \right) : \alpha + \beta + \gamma,$$

és azt akarjuk belátni, hogy az osztandó nem kisebb az osztónál. Mivel mindkettő pozitív, elég azt belátni, hogy a különbségük pozitív vagy 0.

Ez fele a következő kifejezésnek:

$$[\alpha^2(\beta - \gamma)^2 + \beta^2(\gamma - \alpha)^2 + \gamma^2(\alpha - \beta)^2] : \alpha\beta\gamma,$$

ami pedig valóban nem lehet negatív, egyenlőség akkor és csakis akkor áll be, ha $\alpha = \beta = \gamma$, speciálisan ha az ABC háromszög egyenlő oldalú.

Ezzel állításunkat – és az előrebocsátottak szerint egyben a feladat állítását is – bebizonyítottuk, valódi $ABCD$ tetraéder esetében (1)-ben nem állhat egyenlőség.

Még csak azt jegyezzük meg, hogy a (4) koordinátákkal meghatározott pont mindig létezik, (3) változó részének értéke arra a pontra nézve 0, és ezért az állítás nem élesíthető, vagyis (1) jobb oldalára $(1 + \varepsilon)$ -t írva, ahol ε pozitív szám, már megadható olyan valódi tetraéder, melyre a módosított állítás nem érvényes.

Páles Zsolt (Sátoraljaújhely, Kossuth L. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Nem nehéz belátni, hogy a (4) koordinátákkal megadott pont rajta van az AB oldalt

$$\beta : \alpha = \frac{1}{b^2} : \frac{1}{a^2}$$

arányban osztó pontot a C csúccsal összekötő egyenesen, ugyanígy a BC -t $\gamma : \beta$ és a CA -t $\alpha : \gamma$ arányban osztó pontot a szemben levő csúccsal összekötő egyenesen. E 3 egyenes Ceva tétele alapján egy ponton megy át, ugyanis

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} = 1.$$