

$$(1) \quad px^2 + qy^2 + rx + sy + t = 0$$

Tegyük fel, hogy az (1) egyenletet két egymást metsző egyenes pontjai – és csak ezek – elégítik ki. Legyenek a két egyenes M metszéspontjának a koordinátái $M(u; v)$, ekkor

$$(2) \quad pu^2 + qv^2 + ru + sv + t = 0.$$

Ha a $P(x; y)$ koordinátákra teljesül (1), akkor a

$$(3) \quad \xi = x - u, \quad \eta = y - v$$

koordinátákra

$$p(\xi + u)^2 + q(\eta + v)^2 + r(\xi + u) + s(\eta + v) + t = 0$$

teljesül, ami (2) alapján ekvivalens a

$$(4) \quad p\xi^2 + q\eta^2 + r_0\xi + s_0\eta = 0$$

egyenlettel, ahol

$$(5) \quad r_0 = 2pu + r, \quad s_0 = 2qv + s.$$

Megfordítva: ha $(\xi; \eta)$ -ra teljesül (4), akkor a $(\xi; \eta)$ -hoz (3) alapján hozzárendelt $(x; y)$ -ra teljesül (1). Mivel P -vel együtt az MP egyenes minden pontja kielégíti az (1) egyenletet, ha $(x; y)$ -ra teljesül (1), akkor tetszőleges t mellett az

$$x_t = u + t(x - u); \quad y_t = v + t(y - v)$$

koordinátákra is teljesül (1). A fenti átfogalmazás szerint ez azt jelenti, hogy ha $(\xi; \eta)$ -ra teljesül (4), akkor $(t\xi; t\eta)$ -ra teljesül az, vagyis (4) maga után vonja a

$$(p\xi^2 + q\eta^2)t^2 + (r_0\xi + s_0\eta)t = 0$$

teljesülését is. Viszont (4)-ből

$$(p\xi^2 + q\eta^2)t^2 + (r_0\xi + s_0\eta)t^2 = 0.$$

A két egyenletet összevetve:

$$(6) \quad r_0\xi + s_0\eta = 0.$$

Ezek szerint valamely $(\xi; \eta)$ párra csak úgy teljesülhet (4), ha erre a párra (6) is teljesül.

Visszatérve (3) segítségével az $(x; y)$ koordinátákra, (6)-ból a

$$(7) \quad r_0x + s_0y = r_0u + s_0v$$

egyenletet kapjuk. Ha r_0, s_0 valamelyike nem volna 0, akkor (7)-et csak egy egyenes pontjai elégítenék ki, és csak ezek a pontok elégíthetnék ki (1)-et – ami feltevésünk szerint nem lehet. Tehát

$$(8) \quad r_0 = s_0 = 0,$$

miatt (4) a következő egyenlettel azonos

$$(9) \quad p\xi^2 + q\eta^2 = 0.$$

Ha itt $p = q = 0$ volna, (9)-et tetszőleges $(\xi; \eta)$, és (1)-et tetszőleges $(x; y)$ kielégítené. Ha (9)-ben $p = 0, q \neq 0$ volna, (9)-et csak az $\eta = 0$, és (1)-et csak az $y = v$ egyenes pontjai elégítenék ki. Hasonlóan kapjuk, hogy $p \neq 0, q = 0$ sem lehet, tehát $pq \neq 0$. Az sem lehet, hogy p és q előjele megegyezzen, hiszen ekkor (9)-et csak $\xi = \eta = 0$, és (1)-et csak $x = u, y = v$ elégíthetné ki. Tehát (1) csak akkor lehet két metsző egyenes egyenlete, ha

$$(10) \quad pq < 0.$$

Ekkor (8) és (5) alapján

$$(11) \quad u = -\frac{r}{2p}, \quad v = -\frac{s}{2q},$$

tehát (2) szerint

$$(12) \quad 4t = \frac{r^2}{p} + \frac{s^2}{q}.$$

Ezzel beláttuk, hogy (10) és (12) szükséges feltétele annak, hogy az (1) egyenletet két egymást metsző egyenes pontjai – és csak ezek – elégítsék ki.

Ha a p, q, r, s, t paraméterekre teljesül (10) és (12), akkor (1) ekvivalens a

$$(13) \quad p(x-u)^2 + q(y-v)^2 = 0$$

egyenlettel, ahol u -t és v -t (11) határozza meg. Legyen $\sqrt{-\frac{q}{p}} = \lambda$, akkor (13) ekvivalens az

$$[(x-u) + \lambda(y-v)][(x-u) - \lambda(y-v)] = 0$$

egyenlettel, amit viszont az

$$(14) \quad (x-u) + \lambda(y-v) = 0,$$

$$(15) \quad (x-u) - \lambda(y-v) = 0$$

egyenesek pontjai – és csak ezek – elégítenek ki. Mivel $\lambda \neq 0$, a (14) és (15) egyenletek különböző egyeneseket határoznak meg, amelyeknek $(u; v)$ közös pontja, vagyis (14) és (15) egymást metsző egyenesek egyenletei. A (10) és (12) feltételek teljesülése esetén tehát (1) egymást metsző egyenespár egyenlete, ezzel beláttuk, hogy a keresett szükséges és elégséges feltétel a (10) és (12) teljesülése.