

I. megoldás. Az n egymás után született gyermeknek pusztán a nemük szerinti felsorolása f (fiú) és l (leány) jelekkel 2^n -féle lehet (n -ed osztályú ismétléses variációk 2-féle elemből). A feladat zárójelbe tett megállapodása egyenértékű azzal, hogy a 2^n lehetséges felsorolás mindegyike egyformán valószínű.

A kérdésünk szempontjából kedvező felsorolások mindegyikében megkeressük a legidősebb (vagyis az első) olyan gyermeket, akinek van bátyja is, néneje is, öccse is és húga is, és a felsorolásokat ennek a legidősebb gyermeknek a születés időrendjében kapott i sorszáma szerint összefoglaljuk egy-egy *osztályba*. Nyilvánvalóan így minden kedvező felsorolás egy és csak egy osztályba tartozik majd bele; i -t az illető osztály *indexének* nevezzük, értékére áll $3 \leq i \leq n - 2$.

Az a tény, hogy az i sorszámú gyermek az *első megfelelő*, egyrészt azt jelenti, hogy a korábban született ($i - 1$) gyermek között van fiú is, lány is, de az öt közvetlenül megelőző ($i - 1$) sorszámú gyermek előtti ($i - 2$) testvér közt már vagy fiú nincs, vagy lány nincs. Ez az ($i - 2$) tagú együttes tehát csupa egyneműből áll. Jelöljük az együttest röviden $f^{(i-2)}$ -vel, ill. $l^{(i-2)}$ -vel, így az első i gyermek felsorolása csak a következő 4 lehetőség valamelyike lehet:

$$(1) \quad f^{(i-2)}, l, f; \quad l^{(i-2)}, f, f; \quad f^{(i-2)}, l, l; \quad l^{(i-2)}, f, l.$$

Másrészt az jellemzi az i indexű osztályt, hogy minden egyes felsorolásában az $(n - i)$ számú további (fiatalabb) testvér *nem mind* egynemű. Így az utóbbiak felsorolása $m = 2^{n-i} - 2$ különböző felének adódhat, hiszen csak a „csupa fiú” és a „csupa leány” sorrendek vannak kizárva a gondolható 2^{n-i} ismétléses variáció közül. Az m -féle befejezés mindegyike az (1) alatti kezdések mindegyikéhez hozzákapszolható, tehát az i indexű osztályba

$$4m = 4(2^{n-i} - 2) = 2^{n+2-i} - 8$$

számú felsorolás tartozik.

Ezt a kifejezést az $i = 3, 4, 5, \dots, n - 2$ értékekre összegezve a kedvező felsorolások (családok) száma

$$\sum_{i=3}^{n-2} (2^{n+2-i} - 8) = (2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^4) - 8(n-4) = 2^n + 16 - 8n,$$

végül a kért valószínűség:

$$(2) \quad p = \frac{2^n - 8(n-2)}{2^n} = 1 - \frac{n-2}{2^{n-3}}$$

(speciálisan $n = 5, 6, 7$ és 10 esetére rendre $0,25; 0,5; 0,6875; 0,9375$).

Veres Sándor (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o. t.)

Hargitai Bálint (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Meggondolásunk első része átvihető a gyermekek növekedő életkoruk szerinti felsorolására is. És ha minden gondolható kedvező felsorolásra megállapítjuk a legfiatalabb megfelelő gyermek j sorszámát is, és a felsorolásokat az első és utolsó megfelelő gyerek sorszámainak egyidejű figyelembevételével osztályozzuk, akkor az i és j indexű osztálybeli felsorolásokban $j - (i - 1)$ számú gyermeknek van bátyja is, néneje is, húga is és öccse is. Így kis módosítással fölvethető ez a kérdés is: találomra kiválasztva egy n gyermekkel bíró apa valamelyik gyermekét, mi a valószínűsége annak, hogy ennek a gyermeknek legyen bátyja is, öccse is, húga is és néneje is.

II. megoldás. Egyszerűbb számba venni a kérdés szempontjából kedvezőtlen – röviden: „tlen” sorrendeket, családokat.

Nyilván „tlen” az eset, ha nincs lány a családban vagy ha csak 1 van. Az előbbi egyetlen módon lehet: csupa fiúval, az utóbbi n -féleképpen, a leány $1, 2, \dots, n$ indexe szerint.

2 leányt véve is „tlen” a sorrend, ha nem áll köztük fiú: $ff \dots flfff \dots f$, mert egyik bátyjuknak sincs néneje, egyik öccsüknek sincs húga, és mert maguknak csak egyféle leánytestvérük van. Ilyen sorrend $(n - 1)$ -féle van az első leány indexe szerint. A 2 leány közé 1 fiút iktatva ez az egyetlen, akinek már van kétféle leánytestvére, de még ilyen „ lfl -blokk” (változtathatatlan részsorrend) mellett is „tlen” a sorrend, ha a blokk a sorrend elején vagy a végén van, ami 2 módot jelent. Ha azonban az $(n - 2)$ fiú közül legalább 2 van a két leány között, akkor a sorrend már kedvező, tekintet nélkül a további $n - 4 (\geq 1)$ fiú sorrendi helyzetére.

Az eddigiekben „lány” helyett mindenütt „fiút” mondva, fiú helyett viszont lányt – ugyanezeket az eredményeket kapjuk; tehát azokban a családokban, ahol valamelyik nemű gyermekből legföljebb 2 van, a „tlen” esetek száma $2\{1 + n + (n - 1) + 2\} = 4n + 4$; ugyanis így $n \geq 5$ miatt egyetlen családot sem számítottunk kétszeresen.

Ha lány is, fiú is legalább 3 van – azaz a leányok száma 3 vagy 4 vagy $\dots (n - 3)$, ami együtt $(n - 5)$ eset – az eddigiek mintájára minden esetben 4 „tlen” képezhető:

a) az összes lány is, az összes fiú is egy-egy blokkot alkot, ez 2 mód:

l, \dots, l, f, \dots, f és f, \dots, f, l, \dots, l ;

b) a most mondott két blokk csatlakozásánál levő két gyerek sorrendjét fölcseréljük:

$$\underbrace{l, l, \dots, l}_2, \underbrace{f, l}_2, \underbrace{f, f, \dots, f}_2, \text{ és } \underbrace{f, f, \dots, f}_2, \underbrace{l, f}_2, \underbrace{l, l, \dots, l}_2$$

Bármelyik nemből 1-nél többet áttéve a másik blokkba, a második áttettnek már négyféle testvére lenne.

Így a kedvezőtlen sorrendek száma:

$$(4n + 4) + 4(n - 5) = 8n - 16 = 8(n - 2),$$

megegyezésben az I. megoldás (2) első törtjében a számláló kivonandójával.

Linnert László (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t.)