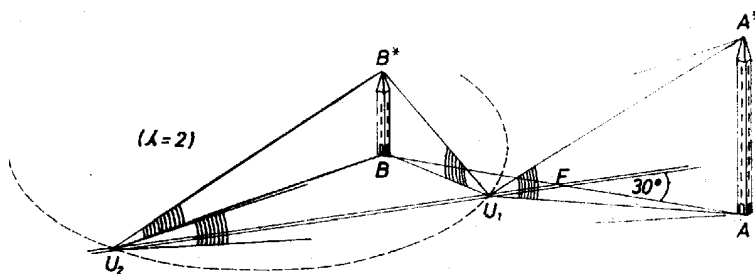


I. megoldás. Elég a $\lambda > 1$ értékekkel foglalkoznunk, mert ez – ha kell – a két torony sorrendjének fölcserélésével elérhető, ha pedig $\lambda = 1$, akkor nyilvánvalóan megfelel az A, B talppontok közti szakasz F felezőpontja, és más pont nem felel meg. (A mondott fölcserélés elérhető az F körüli 180° -os elfordítás útján is, és így az út önmagába megy át.)



1. ábra

A tornyok csúcsát rendre A^* -gal, B^* -gal és az út egy megfelelő pontját U -val jelölve az A^*UA és B^*UB derékszögű háromszögek a látószögek egyenlősége alapján hasonlóak (1. ábra), ezért

$$UA : UB = AA^* : BB^* = \lambda, \quad UA > UB,$$

ennélfogva $UFB \angle = 30^\circ$, $UFA \angle = 150^\circ$. Legyen még $AB/2 = AF = a$ és $FU = x$, ekkor az UFA , UFB háromszögekben a cosinustétel alkalmazásával

$$\frac{UA^2}{UB^2} = \frac{x^2 + a^2 + \sqrt{3}ax}{x^2 + a^2 - \sqrt{3}ax} = \lambda^2,$$

és a szokásos lépésekkel

$$(1) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}(\lambda^2 + 1)}{\lambda^2 - 1} \cdot \frac{x}{a} + 1 = 0,$$

$$(2) \quad \left(\frac{x}{a}\right)_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \pm \sqrt{\frac{3}{4} \left(\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1}\right)^2 - 1},$$

hacsak a gyökjel alatt nemnegatív szám áll. Ezzel meghatároztuk a kívánt tulajdonságú pontoknak az úton elfoglalt helyzetét, FA egységekben mérve.

2. A megoldások száma 0, 1, illetőleg 2 aszerint, hogy a D diszkrimináns negatív, 0, ill. pozitív. Ezt a föltételt kell úgy átalakítanunk, hogy közvetlenül λ értékéből adhassunk választ a kérdésre. Előrebocsátjuk, hogy a $\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1}$ hányados a $\lambda > 1$ föltevés folytán pozitív, így a $D \geq 0$ egyenlőtlenség λ -ra való megoldása esetszétválasztás nélkül halad:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \left(\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1}\right)^2 - 1 &\geq 0, \\ \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} = 1 + \frac{2}{\lambda^2 - 1} &\geq \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ \frac{1}{\lambda^2 - 1} &\geq \frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}, \\ \lambda^2 - 1 &\leq 4\sqrt{3} + 6, \\ \lambda^2 &\leq 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2. \end{aligned}$$

Ezek szerint $\lambda > 2 + \sqrt{3}$ esetén nincs megoldás U -ra, $\lambda = 2 + \sqrt{3}$ esetén egyetlen megoldás:

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} = 1,$$

$1 < \lambda < 2 + \sqrt{3}$ esetén pedig 2 megoldás van, és mindkettő pozitív, hiszen (1) együtthatói szerint összegük is, szorzatuk is pozitív.

II. megoldás. Ismeretes, hogy – a fönti jelölésekkel – a síknak az $UA : UB = \lambda (> 1)$ föltételnek eleget tevő pontjai az A, B alappontokkal és a λ aránymutatóval meghatározott k_λ Apollóniosz-körön vannak. Ez szimmetrikus az AB egyenesre, az AB -n levő pontjai egy átmérőjét jelölik ki.


$$FO = FC_1 + \frac{C_1 C_2}{2} = FB - C_1 B + \frac{2\lambda a}{\lambda^2 - 1} = \frac{a(\lambda^2 + 1)}{\lambda^2 - 1},$$
$$\frac{a(\lambda^2 + 1)}{2(\lambda^2 - 1)} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \frac{2a\lambda}{\lambda^2 - 1},$$
$$\lambda^2 + 1 \leq 4\lambda.$$

Ebből ismét a fenti eredményt kapjuk.