

$$(1) \quad \frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} \leq \frac{9}{4}.$$

I. megoldás. Az A_2A_1C háromszög hasonló az A_2CA háromszöghöz, mert A_2 -nél levő szögük közös, továbbá $A_1CA_2 \sphericalangle = BCA_2 \sphericalangle = BAA_2 \sphericalangle = CAA_2 \sphericalangle$. A megfelelő oldalak arányából

$$A_1A_2 = A_2C \frac{A_1C}{CA}, \quad A_2A = CA_2 \frac{CA}{A_1C},$$

és így (1) első tagja a háromszög oldalainak szokásos jelölésével a szögfelező osztásaránya alapján:

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{AA_2 - A_1A_2}{AA_2} = 1 - \left(\frac{A_1C}{CA} \right)^2 = 1 - \left(\frac{\frac{ab}{b+c}}{b} \right)^2 = 1 - \left(\frac{a}{b+c} \right)^2.$$

Mivel a B_1 és C_1 , valamint a B_2 és C_2 pontokat ugyanúgy kapjuk, mint A_1 -et, illetve A_2 -t, azért az A , B , C , valamint a , b , c betűk ciklikus felcserélésével (1) további tagjait kifejezve, (1) helyett azt bizonyíthatjuk, hogy minden háromszögben

$$\left(\frac{a}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c+a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a+b} \right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

A nyilvánvaló

$$(u+v)^2 \leq 2u^2 + 2v^2$$

azonosságból

$$\frac{1}{(u+v)^2} \geq \frac{1}{2(u^2+v^2)},$$

ennek alapján elég ezt bizonyítanunk:

$$(2) \quad \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Bevezetve az

$$x = b^2 + c^2, \quad y = c^2 + a^2, \quad z = a^2 + b^2$$

jelöléseket, a számlálók, majd (2) így alakulnak:

$$\begin{aligned} 2a^2 &= y + z - x, & 2b^2 &= z + x - y, & 2c^2 &= x + y - z, \\ \frac{y+z-x}{x} + \frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} &\geq 3, \\ \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) &\geq 6, \end{aligned}$$

ami nyilvánvaló az ismert

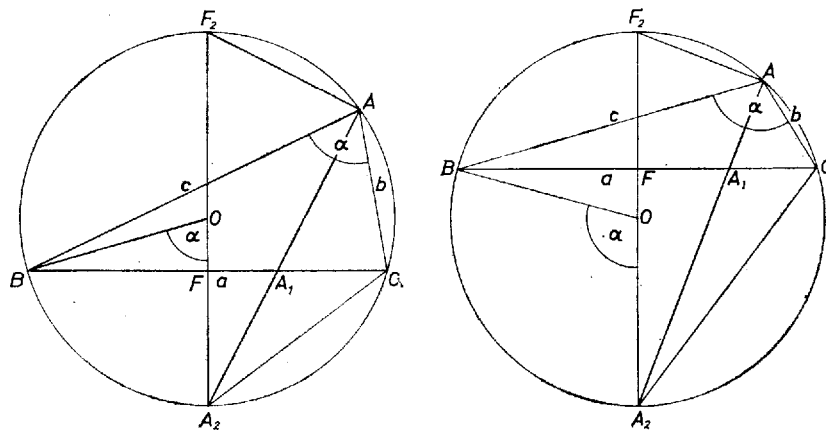
$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

egyenlőtlenség alapján.

Könnyű belátni, hogy egyenlőség mindenütt akkor és csak akkor áll, ha $a = b = c$.

Bara Tamás (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A szögfelezés, a BAA_2 és CAA_2 kerületi szögek egyenlősége alapján a szárai közötti BA_2 , CA_2 ívek valamint húrok is egyenlők, ezért A_2 rajta van a BC oldal felező merőlegesén. Jelöljük ennek a BC oldalon levő pontját F -fel, a körön levő másik pontját F_2 -vel.



Így A_2F_2A és A_2A_1F derékszögű háromszögek – vagy pedig F_2 azonos A -val, F az A_1 -gyel –, ezért $A_1A_2 \geq FA_2$ és $AA_2 \geq F_2A_2$, tehát

$$(3) \quad \frac{A_1A_2}{AA_2} \geq \frac{FA_2}{F_2A_2},$$

$$\frac{AA_1}{AA_2} = 1 - \frac{A_1A_2}{AA_2} \leq 1 - \frac{FA_2}{F_2A_2} = \frac{F_2F}{F_2A_2}.$$

Mármost $F_2F = F_2O \pm OF$, aszerint véve az előjelet, hogy a $BAC \angle = BOA_2 \angle$ hegyesszög-e vagy tompaszög. Ez a vagylagosság ismét egységgé válik, ha OF -et az OB sugár vetületének tekintjük az O -tól A_2 felé irányított F_2A_2 átmérőre (a szögek szokásos jelölésével):

$$\frac{F_2F}{F_2A_2} = \frac{F_2O + OB \cos \alpha}{2F_2O} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha,$$

tehát (1) első tagjára

$$(4) \quad \frac{AA_1}{AA_2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha.$$

Meg gondoláskunk a betűk kellő cseréjével (1) második és harmadik tagjára is érvényes, ezért (1) bizonyítására elegendő igazolni a belőle (4)-nek és megfelelőinek behelyettesítésével adódó

$$(5) \quad \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$$

egyenlőtlenséget.

Itt ismert goniometrikus azonosságok alapján az első két tag összegére

$$(6) \quad 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \sin \frac{\gamma}{2},$$

mert $(\alpha + \beta)/2 < 90^\circ$; a harmadik tag $1 - 2 \sin^2 \gamma/2$, ezekkel pedig (5) jobb és bal oldalának különbsége nem kisebb, mint

$$(7) \quad \frac{1}{2} + 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} - 2 \sin \frac{\gamma}{2} = 2 \left(\sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0.$$

Ezzel (5)-öt – ami különben elég gyakran előforduló egyenlőtlenség a háromszög szögeire – és vele a feladat állítását is bebizonyítottuk.

(3)-ban, (4)-ben és (6)-ban – mint említettük – egyenlőség áll, ha $AB = AC$; ezért ha még $BC = AB$ is fennáll, vagyis ha az ABC háromszög egyenlő oldalú akkor (5) és (7) két oldala is egyenlő. Ebben az esetben, de csakis ekkor, egyenlőség áll (1)-ben is. Valóban, szabályos háromszög esetében (1) bal oldalának mindhárom tagja $3/4$.

Megjegyzés. Meg lehet mutatni, hogy $AA_1 = f_a$ jelöléssel

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{f_a^2}{bc},$$

ezzel (1) így alakul:

$$\frac{f_a^2}{bc} + \frac{f_b^2}{ca} + \frac{f_c^2}{ab} \leq \frac{9}{4}.$$

Az 1799. feladatban¹ viszont ezt bizonyítottuk:

$$\frac{s_a^2}{bc} + \frac{s_b^2}{ca} + \frac{s_c^2}{ab} \geq \frac{9}{4},$$

ahol a számlálókban a súlyvonalak hossza áll. Végül a magasságokra

$$m_a \leq f_a (\leq s_a),$$

tehát ezekre méginkább

$$\frac{m_a^2}{bc} + \frac{m_b^2}{ca} + \frac{m_c^2}{ab} \leq \frac{9}{4}.$$

¹Lásd K.M. L. (1973) 118. old.