Minden valós m-re kapunk parabolát, mert a föllépő nevezők mindig pozitívok és x^2 együtthatója nem 0. (1)-et – jobb oldalának első két tagját teljes négyzetté kiegészítve – így alakítjuk:

$$y=\left(x-\frac{2m}{1+m^2}\right)^2+\frac{1-m^4}{(1+m^2)^2}.$$

Az utolsó tag egyszerűsíthető $(1+m^2)$-nel, ezért tovább

$$y-\frac{1-m^2}{1+m^2}=\left(x-\frac{2m}{1+m^2}\right)^2$$

Eszerint az (1) egyenlet úgy áll elő a normálparabola $y=x^2$ egyenletéből, hogy x helyére $x-u$-t írunk, egyúttal y helyére $y-v$-t, ahol

$$u=\frac{2m}{1+m^2}, \tag{2}$$

$$v=\frac{1-m^2}{1+m^2}. \tag{3}$$

Ez azt jelenti, hogy a normálparabola csúcsa, az origó, az u abszcisszájú és v ordinátájú pontba tolódott, vagyis parabolánk csúcsa a $C(u,\,v)$ pont.

Míg m minden valós értéket fölvesz, a C parabolacsúcs mértani helyének egyenletét úgy kapjuk, hogy az u, v és m közt fennálló (2), (3) egyenletrendszerből kiküszöböljük m-et. (3)-ból (2) figyelembevételével

$$v=1-\frac{2m^2}{1+m^2}=1-mu,$$

így

$$m=\frac{1-v}{u} \tag{4}$$

hacsak a $u\neq 0$, ami (2) szerint a paraméter minden $m\neq 0$ értéke esetében teljesül. Az $m=0$ érték esetét későbbre halasztva, (4)-et beírjuk m^2-nek (3)-hól származó kifejezésébe:

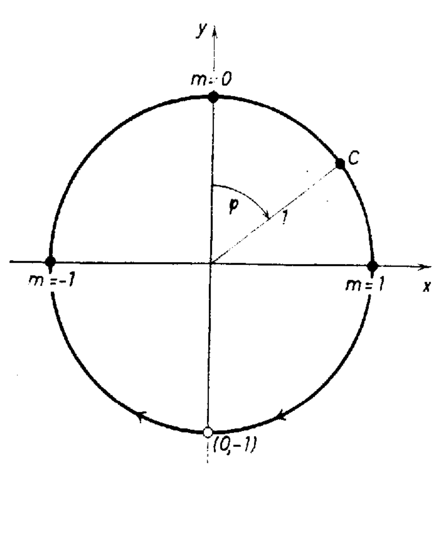
$$m^2=\frac{1-v}{1+v}=\frac{(1-v)^2}{u^2},\qquad \frac{1}{1+v}=\frac{1-v}{u^2},$$

hiszen amivel egyszerűsítettünk: $1-v=\dfrac{2m^2}{1+m^2}$ csak $m=0$ esetén válik 0-vá. Végül átrendezéssel C koordinátái közt a következő összefüggést kapjuk:

$$u^2+v^2=1,\ \text{ahol azonban } u\neq 0. \tag{5}$$

Eszerint ha $m\neq 0$, akkor C az origó körüli egységkörön van, de nincs rajta az ordinátatengelyen.

A hátralevő $m=0$ esetben pedig (2)-ből $u=0$ és (3)-ból $v=1$, vagyis az egységkörnek az ordinátatengely pozitív felén levő pontjában van a parabola csúcsa.



Megmutatjuk, hogy az egységkörből a $(0;\,-1)$ pontot kihagyva, minden maradó $C(u,\,v)$ ponthoz – ahol tehát $u^2+v^2=1$, de $v\neq -1$ – van olyan m érték, melyre (2) és (3) jobb oldala u-t, ill. v-t adja. Ez az érték nem lehet más, mint ami (3) és (2) fölhasználásával adódik:

$$m^2=\frac{1-v}{1+v},\qquad 1+m^2=\frac{2}{1+v};$$
$$m=\frac{u}{2}(1+m^2)=\frac{u}{1+v},$$

csupán azt kell átgondolnunk, hogy a mondott számítás a $v=-1$ érték kivételével mindig érvényes. A számítást csak (2)-re mutatjuk be:

$$\frac{2m}{1+m^2}=\frac{\dfrac{2u}{1+v}}{1+\dfrac{u^2}{(1+v)^2}}=\frac{2u(1+v)}{(1+v)^2+u^2}=$$
$$=\frac{2u(1+v)}{1+2v+(u^2+v^2)}=\frac{2u(1+v)}{2+2v}=u.$$

Mindezek szerint az (1) parabolák esúcsának mértani helye az origó körüli egységkör, a legalsó $(0;\,-1)$ pont kihagyásával.

Dombováári Tamás (Budapest, I. István Gimn. IV. o. t.)
Gehér Klára (Szeged, Radnóti M. Gimn. IV. o. t.)
Tóth András (Pápa, Türr I. Gimn. IV. o. t.)

Megjegyzések 1. Akik ismerik a gyakran használható

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}},\qquad \cos x=\frac{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$$

azonosságokat, tüstént látják, hogy $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}=m$ jelöléssel (2)-ből és (3)-ból $u=\sin\varphi$, $v=\cos\varphi$, ahol φ az OC félegyenes szöge az ordinátatengelytől negatív forgási irányban mérve. Amíg m növekedve befutja a valós számokat,

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg} m=\frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{2},$$

addig C befutja az egységkört a $\varphi=\pi$ pont kivételével.

2. Máshogyan is megkaphatjuk a csúcs koordinátáit, úgy is, hogy a parabolát az (1) függvény képének tekintjük, deriválás útján megállapítjuk a minimumpont abszcisszáját és ebből (1) alapján az ordinátáját. Az ilyen dolgozatok azonban az átértelmezéssel (ti. a geometriai kérdésnek függvény-vizsgálati kérdéssé való átfogalmazásával) alig bajlódtak.