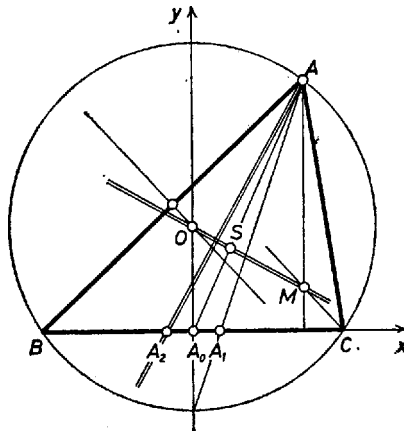


**I. megoldás.** Helyezzünk koordinátarendszert az alakzatra, legyen az origója  $A_0$ ,  $x$  tengelye a  $BC$  egyenes, a csúcsok koordinátái  $B(-a/2, 0)$ ,  $C(a/2, 0)$ ,  $A(d, m_a)$  (1 ábra).



1. ábra

Az  $AB = AC$  esetet – ill. a szokásos jelöléssel  $c = b$  – eleve kizárjuk, mert ekkor a föltevés szerint  $a = b = c$ , a háromszög egyenlő oldalú, az állításbeli  $SO$  egyenes határozatlan, az állítás tárgyatlan.

Legyen  $A_1$  abszcisszája  $e$ , erre a szögfelező osztási aránya alapján

$$AB : AC = A_1B : A_1C,$$

$$c : b = \left( e + \frac{a}{2} \right) : \left( \frac{a}{2} - e \right)$$

$$e = \frac{a(c - b)}{2(b + c)}, \quad (\neq 0)$$

és mivel az értelmezés szerint  $A_2(-e, 0)$ , ezért az  $AA_2$  egyenes iránytangense

$$(1) \quad m_1 = \frac{m_a}{d + e} = \frac{2m_a(b + c)}{2d(b + c) + a(c - b)}.$$

A súlypont koordinátái:  $S(d/3, m_a/3)$ .

A körülírt kör  $O$  középpontját az  $AB$  szakasz felező merőlegese metszi ki  $BC$  felező merőlegeséből, az  $y$  tengelyből. Az  $AB$  szakasz felezőpontja és iránytangense

$$\left( \frac{d}{2} - \frac{a}{4}, \quad \frac{m_a}{2} \right), \quad \frac{m_a}{d + \frac{a}{2}} = \frac{2m_a}{2d + a},$$

így felező merőlegesének egyenlete, majd abból  $x = 0$  helyettesítéssel  $O$ -nak  $y_0$  ordinátája

$$y - \frac{m_a}{2} = -\frac{2d + a}{2m_a} \left( x - \frac{d}{2} + \frac{a}{4} \right),$$

$$y_0 = \frac{m_a}{2} - \frac{2d + a}{2m_a} \left( \frac{a}{4} - \frac{d}{2} \right) = \frac{4m_a^2 - a^2 + 4d^2}{8m_a}.$$

Ezekkel az  $SO$  egyenes iránytangense (mivel  $d \neq 0$ )

$$m_2 = \frac{y_0 - \frac{m_a}{3}}{-\frac{d}{3}} = -\frac{12d^2 + 4m_a^2 - 3a^2}{8dm_a}.$$

Az állítás szerint az  $a^2 = bc$  föltevés mellett  $m_1$  és  $m_2$  egymás negatív reciprokai. Ennek igazolására szorozzuk számlálóját és nevezőjét  $(c - b)$ -vel:

$$(2) \quad m_1 = \frac{2m_a(c^2 - b^2)}{2d(c^2 - b^2) + a(c - b)^2},$$

és fejezzük ki  $b$ -t,  $c$ -t a koordinátákkal:

$$b^2 = \left(d - \frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2, \quad c^2 = \left(d + \frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2.$$

Innen, a  $bc = a^2$  föltevést is fölhasználva

$$c^2 - b^2 = 2ad,$$

$$(c - b)^2 = c^2 + b^2 - 2a^2 = 2d^2 + 2m_a^2 - \frac{3}{2}a^2.$$

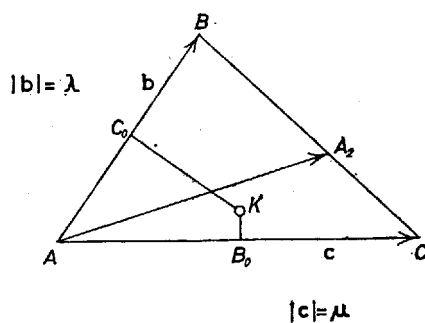
Ezekkel (2) így alakul:

$$\frac{4adm_a}{4ad^2 + a\left(2d^2 + 2m_a^2 - \frac{3}{2}a^2\right)} = \frac{8dm_a}{12d^2 + 4m_a^2 - 3a^2},$$

és ez valóban negatív reciproka  $m_2$ -nek. Ezzel az állítást bebizonyítottuk minden olyan esetre, ha  $AB \neq AC$ . Ismeretes ugyanis, hogy  $S$  csak az egyenlő oldalú háromszögben esik egybe  $O$ -val, másrészt  $c > b$  mellett  $d > 0$ ,  $e > 0$ , a felhasznált  $d + e$ ,  $2d + a$ ,  $c - b$  nevezők, ill. szorzó mindegyike pozitív.

*Stettner Eleonóra* (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., IV. o. t.)

**II. megoldás.** Azok számára, akik ismerik a vektorok skaláris szorzatát, leírunk egy második megoldást is. Válasszuk origónak az  $A$  csúcsot,  $B$  és  $C$  helyvektorát jelöljük rendre  $\mathbf{b}$ -vel,  $\mathbf{c}$ -vel, e vektorok hosszát  $\lambda$ -val és  $\mu$ -vel (2. ábra).



2. ábra

Akkor  $A_2$  helyvektora

$$\overrightarrow{AA_2} = \frac{\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}}{\lambda + \mu},$$

a háromszög  $S$  súlypontjának a helyvektora pedig

$$\overrightarrow{AS} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}.$$

A körülírt kör  $K$  középpontjának a helyvektora

$$\overrightarrow{AK} = y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$$

olyan  $y$  és  $z$  skaláris mennyiségekkel, amelyekre  $KC_0 \perp AB$  és  $KB_0 \perp AC$ , azaz amelyekre teljesül

$$(3) \quad \left[\left(y - \frac{1}{2}\right)\mathbf{b} + z\mathbf{c}\right]\mathbf{b} = 0, \quad \left[y\mathbf{b} + \left(z - \frac{1}{2}\right)\mathbf{c}\right]\mathbf{c} = 0.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy  $SK \perp AA_2$ , azaz

$$\left[\left(y - \frac{1}{3}\right)\mathbf{b} + \left(z - \frac{1}{3}\right)\mathbf{c}\right](\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}) = 0.$$

Szorozzuk meg (3)-et  $\lambda$ -val, (4)-t  $\mu$ -vel, és a kapott egyenleteket adjuk össze:

$$(y\mathbf{b} + z\mathbf{c})(\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}) = \frac{\lambda^3 + \mu^3}{2}.$$

Ennek alapján elég megmutatni, hogy

$$\frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c})(\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\lambda^3 + \mu^3),$$

$$2(\lambda^3 + \mu^3) + 2(\lambda + \mu)\mathbf{bc} = 3(\lambda^3 + \mu^3),$$
$$2\mathbf{bc} = \lambda^2 + \mu^2 - \lambda\mu.$$

Jelöljük  $BC$  hosszát  $h$ -val, akkor

$$2\mathbf{bc} = \lambda^2 + \mu^2 - (\mathbf{b} - \mathbf{c})^2 = \lambda^2 + \mu^2 - h^2,$$

tehát azt kell megmutatnunk, hogy  $h^2 = \lambda\mu$  ami viszont épp a feladatunk első feltétele; a bizonyítást befejeztük.