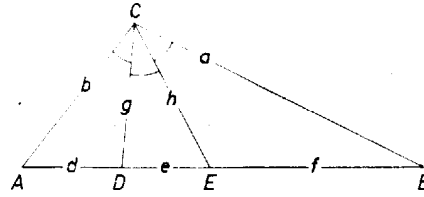


Jelöljük a háromszög csúcsait A, B, C betűvel, és legyen $AB = d + e + f$ úgy, hogy részei $AD = d, DE = e, EB = f$, továbbá legyen $CA = b, CD = g, CE = h, CB = a$ és $\angle ACB = \gamma$, ekkor a föltevés szerint $\angle ACD = \angle DCE = \angle ECB = \frac{\gamma}{3}$.



Fejezzük ki az ACE háromszög területét egyrészt CA, CE oldalával és az $\angle ACE$ szöggel, másrészt az ACD és DCE háromszögek hasonlóan kifejezett területeinek összegeként:

$$\frac{1}{2}bh \sin \frac{2\gamma}{3} = bh \sin \frac{\gamma}{3} \cos \frac{\gamma}{3} = \frac{1}{2}(bg + gh) \sin \frac{\gamma}{3}.$$

Innen, mivel $\gamma > 0^\circ, \sin(\gamma/3) \neq 0$,

$$(1) \quad \cos \frac{\gamma}{3} = \frac{g(b+h)}{2bh}.$$

Betűzzük át eredményünket a DCB háromszögre, majd szorozzuk meg az új kifejezést (1)-gyel:

$$(2) \quad \begin{aligned} \cos \frac{\gamma}{3} &= \frac{h(g+a)}{2ga}, \\ \cos^2 \frac{\gamma}{3} &= \frac{(b+h)(g+a)}{4ba} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{h}{b}\right) \left(\frac{g}{a} + 1\right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{e}{d}\right) \left(\frac{e}{f} + 1\right) = \frac{(d+e)(e+f)}{4df} \end{aligned}$$

Felhasználtuk a továbbalakításban, hogy CD felezi az $\angle ACE$ szöveget és CE felezi a $\angle DCB$ szöveget, ennél fogva az ismert tétel szerint

$$\frac{CE}{CA} = \frac{DE}{DA} \quad \text{és} \quad \frac{CD}{CB} = \frac{ED}{EB},$$

így γ -t kifejeztük a d, e, f szakaszokkal

A számpéldákban rendre

$$\cos^2 \frac{\gamma}{3} = \frac{3}{4}, \quad \frac{19}{4 \cdot 11^2}, \quad 0,7$$

adódik, s mivel $\gamma/3$ mindenestre hegyesszög, cosinusa pozitív, azért rendre

$$\begin{aligned} \cos \frac{\gamma}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \frac{19}{22}, & 0,8367, \\ \cos \gamma &= \left(4 \cos^2 \frac{\gamma}{3} - 3\right) \cos \frac{\gamma}{3} = 0, & -\frac{19}{11^3}, & -0,1673, \\ \gamma &= 90^\circ, & 90^\circ 49', & 99^\circ 38'. \end{aligned}$$

Megjegyzések. Az (1)-ben tulajdonképpen a b, h oldalakkal és a köztük levő szög g felezőjével meghatározott háromszög megfelezt szögét határoztuk meg, ami önmagában is érdekes eredmény.

2. Megkaphatjuk (2)-t abból is, hogy az ABC háromszög területe egyenlő az ADC, DEC és EBC háromszögek területének összegével, ha alkalmazzuk a $\sin \gamma$ -t a $\sin(\gamma/3)$ -mal kifejező azonosságot:

$$\begin{aligned} (2t) \quad ab \sin \gamma &= ab \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\gamma}{3}\right) \sin \frac{\gamma}{3} = (bg + gh + ha) \sin \frac{\gamma}{3}, \\ \sin^2 \frac{\gamma}{3} &= \frac{3}{4} - \frac{g(b+h) + a(h+b-b)}{4ab} = 1 - \frac{(a+g)(b+h)}{4ab}. \end{aligned}$$

3. Az I. és a II. számpélda két-két szakaszának egyenlősége alapján egyszerűbben is célhoz juthatunk. Az I. esetben $d : e = b : h = 1$, az AEC háromszög egyenlő szárú, és $\angle CDB = 90^\circ$, továbbá $e : f = g : a = 1 : 2$, ez a $\cos \angle DCB$ értéke, tehát $\angle DCB = 60^\circ$.

A II. esetben felhasználható a $CA = CB$ egyenlőség, ami abból adódik, hogy C két Apollóniosz-kör metszéspontja: $CA : CE = d : e = f : e = CB : CD$, és ezek egymás tükrörképei AB – vagy ami most ugyanaz: DE – felező merőlegesére.