

Ismeretes a következő azonosság:

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{ctg} x}{2} - \frac{1}{2 \operatorname{ctg} x},$$

amiből átrendezéssel

$$(2) \quad \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x$$

minden olyan x -re, amelyre $\operatorname{ctg} 2x$ értelmezve van, tehát amelyre (k -val egész számot jelölve) $2x \neq k\pi$, vagyis $x \neq k(\pi/2)$, hiszen ekkor $\operatorname{ctg} x$ is, $\operatorname{tg} x$ is értelmezve van.

Írjuk egymás alá (2)-t $(n+1)$ -szer, x helyén rendre az

$$\alpha, \quad \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\alpha}{4}, \quad \dots, \quad \frac{\alpha}{2^n}$$

számokkal, egyszersmind szorozzuk az azonosságokat rendre az

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2^n}$$

tényezővel:

$$\frac{1}{2^i} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2^i} = \frac{1}{2^i} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2^i} - \frac{1}{2^{i-1}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2^{i-1}}.$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Az azonosságokat összeadva a bal oldalon (1) bal oldalát kapjuk. A jobb oldalon pedig mindegyik sor második tagja egyenlő az előtte álló sor első tagjának (-1) -szeresével – természetesen a második ($i = 1$ indexű) sortól kezdve. Így a jobb oldalak összege egyenlő az $i = n$ indexű sor első tagjának és az $i = 0$ indexű sor második tagjának összegével, ami éppen (1) jobb oldala. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Az azonosság érvényességének egyetlen föltétele, hogy 2α ne legyen egész többszöröse π -nek.

Megjegyzés. A dolgozatok többsége teljes indukcióval bizonyította az állítást. Lényegében a fenti megoldás is az, de kevesebb írással.