

Megmondolásunkban D és A (és C_1) szerepét rendre E -nek, B -nek (C_3 -nak) átadva, O , E és C a BF szakasz felezőmerőleges síkjának pontjai, és e sík szintén merőleges a DEF síkra. Ennélfogva a két felező merőleges sík OC metszéspontja is merőleges a DEF síkra, tehát O a C -nek e síkon levő merőleges vetülete. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. (Kihasználtuk azt is, hogy a két sík különböző, mert D és E különbözők, és O nincs rajta DE -n, így tehát OC -re a DEF síkban két különböző, rá merőleges egyenest találtunk: OD -t és OE -t.)

Megjegyzések. 1. Könnyű látni, hogy az a) esetben az ACD és BCE szögek összege éppen egyenlő a DCE szöggel, a b) esetben pedig nagyobb nála; ekkor létrejön a C csúcsú $CDEF$ testszöglet (triéder). Az

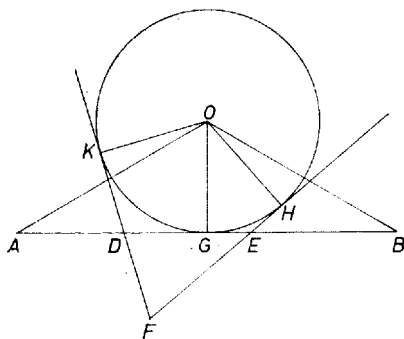
$$ACD_{\triangleleft} + BCE_{\triangleleft} > DCE_{\triangleleft}$$

feltétel a feladat eredeti, $AD < DB$, $AE > EB$ feltételeivel együtt elegendő is a triéder létrejöttéhez, hiszen így

$$ACD_{\triangleleft} < DCE_{\triangleleft} + BCE_{\triangleleft} \quad \text{és} \quad BCE_{\triangleleft} < DCE_{\triangleleft} + ACD_{\triangleleft}.$$

2. O -nak a DEF háromszög belsejéhez képest elfoglalt helyzetéből némi (egyenlőtlenséges) következtetést vonhatunk le a $CDEF$ gúlában a DEF alaplap és a C -ben összefutó oldallapok közti lapszögekre vonatkozóan: az FD , FE alapélű oldallapok hegyesszöget alkotnak az alaplappal, a DE élnél viszont tompaszög van. Az utóbbi abból is adódik, hogy a CA , CB éleknek CF -fé egyesítése után F -nek az ABC háromszög síkján levő vetülete az AB -nek C -t nem tartalmazó oldalára esik.

II. megoldás. Jelöljük a kérdéses külső érintő körnek a DE , EF , FD egyenesen levő érintési pontját – más szóval O -nak az egymás utáni egyenesekre való vetületeit – rendre G , H , K betűvel.



3. ábra

A körhöz a D és E pontokból húzott érintőszakaszok egyenlősége alapján (3. ábra):

$$\begin{aligned} FK &= FD + DK = FD + DG = AD + DG = AG, \\ FH &= FE + EH = FE + EG = BE + EG = BG, \end{aligned}$$

és mivel még $FK = FH$ is áll, azért $AG = BG$. Eszerint G az AB szakasz felezőpontja, ami egyszerstmind C -nek az AB , azaz DE egyenesen levő vetülete. S mivel így GC is, GO is merőleges AB -re, azért a COG sík is merőleges rá, ennélfogva a DEF síkra is.

Amikor a CAD háromszöget a CFD helyzetbe elfordítjuk, fordítsuk vele síkjának G pontját is, vagyis a CAG háromszöget. Így $DG = DK$ alapján G a K -ba jut, CG a CK -ba, és az előbbihez hasonlóan a COK sík is merőleges a DEF síkra. Ekkor pedig ugyanez áll CO metszészonalukra is, tehát O valóban vetülete a C -nek a DEF síkon, ezt kellett bizonyítanunk.