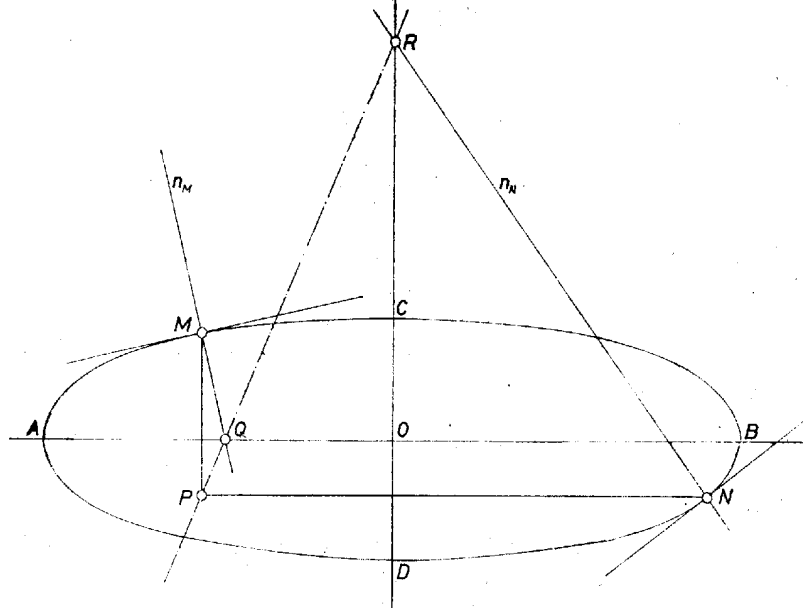


Az állítást a koordináta-geometria eljárásaival bizonyítjuk a szokásosan elhelyezett

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{másképpen} \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

egyenletű ellipszisre, ahol $a > b$, tehát AB az x tengely, CD az y tengely. (Az $a = b$ esetben körrel volna dolgunk, a normális azonos a sugárral, Q és R egybeesnek, így az állítás semmitmondó.) Legyenek M koordinátái (x_1, y_1) , N -éi (x_2, y_2) , ahol $y_1 \neq 0$, és $x_2 \neq 0$, különben ugyanis M az A és B egyike, N a C és D egyike lenne és Q , ill. R nem lenne egyértelműen meghatározott, és ilyen esetben az állításnak nincs is értelme. Így P koordinátái $P(x_1, y_2)$.



Ellipszisünk (x_i, y_i) pontjában, ahol $x_i y_i \neq 0$, az érintő iránytangense (1)-ből deriválással

$$\mp = \frac{bx_i}{a\sqrt{a^2 - x_i^2}}$$

aszerint, hogy $y_i > 0$, ill. $y_i < 0$, és a négyzetgyököt újra csak (1) alapján kifejezve mindenképpen

$$-\frac{b^2 x_i}{a^2 y_i}.$$

Így a normális iránytangense és egyenlete

$$\frac{a^2 y_i}{b^2 x_i}, \quad y - y_i = \frac{a^2 y_i}{b^2 x_i} (x - x_i), \quad \text{azaz} \\ a^2 y_i x - b^2 x_i y - (a^2 - b^2) x_i y_i = 0.$$

Ide i helyére 1-et írva M normálisának egyenletét kapjuk, s mivel Q ordinátája 0, ezt behelyettesítve abszcisszája

$$x_Q = \frac{(a^2 - b^2)x_1 y_1}{a^2 y_1}, \quad \text{azaz} \quad Q \left(x_1 - \frac{b^2}{a^2} x_1, 0 \right),$$

és hasonlóan N révén, azaz $i = 2$ -t, majd $x = 0$ -t beírva

$$R \left(0, y_2 - \frac{a^2}{b^2} y_2 \right).$$

Megállapodásunk szerint P és Q abszcisszái különbözőek, hacsak $x_1 \neq 0$, az általuk meghatározott egyenes iránytangense, valamint egyenlete

$$\frac{a^2 y_2}{b^2 x_1}, \quad y = y_2 + \frac{a^2 y_2}{b^2 x_1} (x - x_1).$$

Erről pedig azonnal látható, hogy R koordinátái kielégítik, a PQ egyenes átmegy R -en, az állítást bebizonyítottuk. (A kizárt $x_1 = 0$ esetben, M a C és D egyike, tehát a PQ egyenes maga az y tengely, a kistengely, az állítás igaz.)

Bartha Miklós (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)