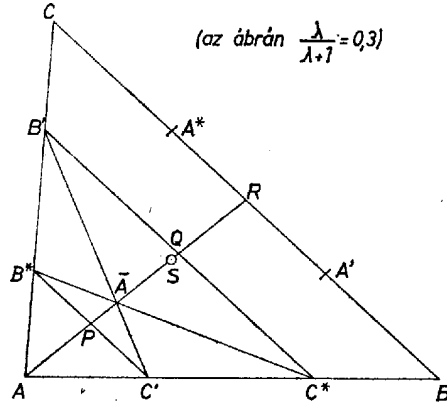


Jelöljük a H , H' háromszögek $1/\lambda$ arányú beírt háromszögeit H^* -gal, illetve $\overline{H}$ -sal (olvasd: há fölül vonás). Megmutatjuk, hogy $\overline{H}$ a H^* -nak λ arányú beírt háromszöge, és H -ból az S centrumú

$$q = \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda^2 + 2\lambda + 1}$$

arányú hasonlósági transzformációval is megkapható, ahol S a H súlypontja.

Jelöljük H^* csúcsait A^* -gal, B^* -gal, C^* -gal, a B^*C' , $B'C^*$, BC szakaszok felezőpontjait rendre P -vel, Q -val, R -rel.



Mivel

$$\frac{AC'}{AB} = \frac{AC'}{AC' + C'B} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} = p,$$

$$\frac{AB^*}{AC} = \frac{AB^*}{AB^* + B^*C} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} = p,$$

azért az AB^*C' háromszög H -ból az A centrumú, p arányú hasonlósággal kapható meg, emiatt $B^*C' \parallel BC$, és $AP = p \cdot AR$. A B^* , C^* pontok származtatása miatt $C^*B = AC'$, $AB^* = B'C$, tehát $AB'C^*$ a H -ból az A centrumú, $(1-p)$ arányú hasonlósággal kapható meg, emiatt $B'C^* \parallel BC$, és $AQ = (1-p) \cdot AR$. Legyen $\bar{A}$ a PQ szakasznak az a pontja, amelyre

$$(2) \quad \frac{P\bar{A}}{AQ} = \frac{p}{1-p} = \lambda,$$

akkor az $\bar{A}$ centrumú, λ arányú hasonlóság P -t Q -ba, B^*C' -t $B'C^*$ -ba viszi, így

$$\frac{B'\bar{A}}{AC'} = \frac{\bar{A}C^*}{B^*A} = \frac{1}{\lambda}.$$

Tehát $\bar{A}$ a H' -nek $1/\lambda$ arányú, és a H^* -nak λ arányú beírt háromszögében is csúcs, és rajta van H -nak AR súlyvonalán. (2) miatt

$$A\bar{A} = p \cdot AQ + (1-p) \cdot AP = 2p(1-p) \cdot AR = \frac{2\lambda}{(\lambda+1)^2} AR,$$

tehát $\bar{A}$ az A -ból az S centrumú,

$$q = \frac{\bar{A}S}{AS} = 1 - \frac{A\bar{A}}{AS} = 1 - \frac{3\lambda}{(\lambda+1)^2} = \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda^2 + 2\lambda + 1}$$

arányú hasonlósággal is megkapható.

Hasonlóan láthatók be a $\overline{H}$ másik két csúcsára vonatkozó állításaink is, előrebecsátott megjegyzésünk bizonyítását ezzel befejeztük.

A most bizonyított állítás szerint H_{n+1} a H_n -ból q arányú centrális hasonlósággal kapható meg, tehát H_{n+1} kerülete H_n kerületének q -szorosa. Eszerint a H_n háromszögek kerületei mértani sorozatot alkotnak, amelyben az első tag 1, és a szomszédos elemek hányadosa q , és $|q| < 1$. Ismeretes, hogy ebben az $(n \text{ elemű})$ sorozatban az elemek összege $(1 - q^n)/(1 - q)$, tehát a H_n háromszögek kerületeinek K összege, ha n minden határon túl nő,

$$K = \frac{1}{1-q} = \frac{(\lambda+1)^2}{3\lambda} \quad \text{hosszúságegység.}$$

Láttuk már, hogy egy háromszög λ arányú beírt háromszögének $1/\lambda$ arányú beírt háromszöge megegyezik a háromszög $1/\lambda$ arányú beírt háromszögének λ arányú beírt háromszögével. Emiatt a H'_n háromszögek kerületei is mértani sorozatot alkotnak, amelyben a szomszédos elemek hányadosa szintén q . A feladat b) állítása tehát következik abból a tényből, hogy az azonos hányadosú (végtelen) mértani sorok összegei úgy aránylanak egymáshoz, mint e sorok első tagjai.