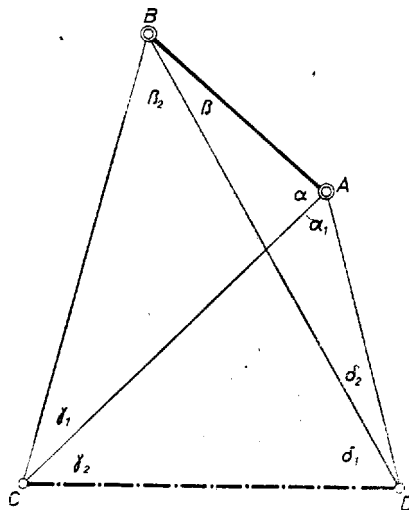


I. megoldás. A konvexitás azt jelenti, hogy a CA átló szétválasztja a D, B csúcsokat, a BD átló pedig C -t és A -t, eszerint $\angle DCB = \angle DCA + \angle ACB = 75^\circ$, és hasonlóan $\angle CDA = \angle CDB + \angle BDA = 75^\circ$. Most a négyszögnek mind a négy részháromszögében csupán két-két független adatot ismerünk.



Megoldhatjuk azonban feladatunkat úgy, hogy kifejezzük a CDA és CDB háromszögből CA -t, ill. CB -t (a sinus-tétel alapján) a *kérdezett* CD oldallal és ismert szögek függvényeivel, majd e két kifejezés felhasználásával az ABC háromszögből az *ismert* AB -t fejezzük ki (a cosinustétel alapján) a *kérdezett* CD oldallal és ismert szögek szögfüggvényeivel. Ezáltal ugyanis egyenletet kapunk CD -re:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot \cos \angle BCA = \\ = \frac{CD^2 \sin^2 \angle CDA}{\sin^2 \angle CAD} + \frac{CD^2 \sin^2 \angle CDB}{\sin^2 \angle CBD} - \frac{2 \cdot CD^2 \sin \angle CDA \sin \angle CDB \cos \angle BCA}{\sin \angle CAD \sin \angle CBD},$$

amiből, áttérve a szögeknek az ábra szerinti egyszerűbb jelölésére

$$CD^2 = \frac{AB^2}{N}, \quad CD = \frac{AB}{\sqrt{N}}, \quad \text{ahol} \\ N = \frac{\sin^2(\delta_1 + \delta_2)}{\sin^2(\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2)} + \frac{\sin^2 \delta_1}{\sin^2(\gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1)} - \frac{2 \sin \delta_1 \sin(\delta_1 + \delta_2) \cos \gamma_1}{\sin(\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2) \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1)}.$$

Számadatainkkal

$$N = \frac{4 - \sqrt{3}}{6}, \quad CD = 25 \sqrt{\frac{6(4 + \sqrt{3})}{13}} = 40,66 \text{ egység}.$$

Megjegyzések. 1. Természetesen a DA és DB távolságok kifejezéseivel is kifejezhetjük volna AB -t, majd ezzel CD -t.

2. Feladatunkban a numerikus számítást elvégezhetjük trigonometriai táblázat nélkül, mert mind a négy szögadat ún. „nevezetes szög”, és ilyenek a felhasznált összegek is.

3. A feladat a gyakorlati trigonometriában (geodéziában) is szerepel, mint az A, B, C és D tereppontok közti 6 távolság kapcsolatának kérdése, ha ismerjük egyrészt az A és B alappontok távolságát, másrészt a meghatározandó C és D pontokban a másik három pont felé mutató irányok közti szögeket. A feladatot *Hansen-féle hátrametszésnek* nevezik. A tankönyvből ismert hátrametszéshez¹ hasonlítva tekinthetjük egyedül C -t meghatározandó pontnak, D -t mintegy a hiányzó harmadik alappont pótlására önkényesen fölvetett pontnak, amely általa válik használhatóvá, hogy benne elvégezhetjük ugyanazokat a szögméréseket, mint C -ben.

Gyakorlati feladatban a mért szögadatok tetszés szerintiek lehetnek, ilyenek mellett a fenti N számítása nehézkes a végzendő több különféle művelet miatt. Bemutatjuk alább a megoldás egy átalakítását abból a korból, amikor a számolások megkönnyítésének majdnem kizárólagos eszközei a logaritmus-táblázatok voltak.

Egyébként feladatunk *szerkesztéssel* való megoldását a Gy. 1419. gyakorlat fogja adni.

II. megoldás. Először az ismert AB oldalra támaszkodó $\angle BAC = \alpha$ és $\angle ABD = \beta$ szögeket számítjuk ki. Összegük nyilvánvalóan $\alpha + \beta = \gamma_2 + \delta_1$, ismert. Az

$$\frac{AB}{AD} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CD}{CB} \cdot \frac{DA}{DC} = 1$$

¹ Czapáry E.–Horvay K.–Pálmay L.: Matematika a gimn. III. o. számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968., 68. oldal.

azonosságból a sinustétel alapján

$$\frac{\sin \delta_2}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_1} \cdot \frac{\sin \beta_2}{\sin \delta_1} \cdot \frac{\sin \gamma_2}{\sin \alpha_1} = 1,$$

és az addíció tétel alkalmazásával

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\sin \alpha_1 \sin \gamma_1 \sin \delta_1}{\sin \beta_2 \sin \gamma_2 \sin \delta_2} \sin \beta = K \sin \beta = K \sin(\gamma_2 + \delta_1 - \alpha) = \\ &= K \sin(\gamma_2 + \delta_1) \cos \alpha - K \cos(\gamma_2 + \delta_1) \sin \alpha, \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{1 + K \cos(\gamma_2 + \delta_1)}{K \sin(\gamma_2 + \delta_1)} = \operatorname{ctg}(\gamma_2 + \delta_1) + \frac{\sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1) \sin \gamma_2 \sin \delta_2}{\sin(\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2) \sin \gamma_1 \sin \delta_1 \sin(\gamma_2 + \delta_1)}, \end{aligned}$$

és itt a második tag kiszámítása trigonometriai logaritmustáblázat használatával csak összeadást–kivonást igényel. (Asztali – kézi vagy elektromechanikus – számológépen is könnyebb a számítása, mert csak szorzás, osztás fordul elő benne.) α és β ismeretében a négy pont közti 5 további szakasz a sinustétel alapján számítható, vagyis a cosinustételnél kényelmesebben.

Megjegyzés. Használtuk a „kényelmes” számolás kifejezést, és némelyeknek talán furcsának tűnik ez az összekapcsolás. De talán megérzik, hogy csak azt szokás érteni ezen: a számítási elv (a végképlet) megállapítása után a numerikus végrehajtással kevesebb a probléma.