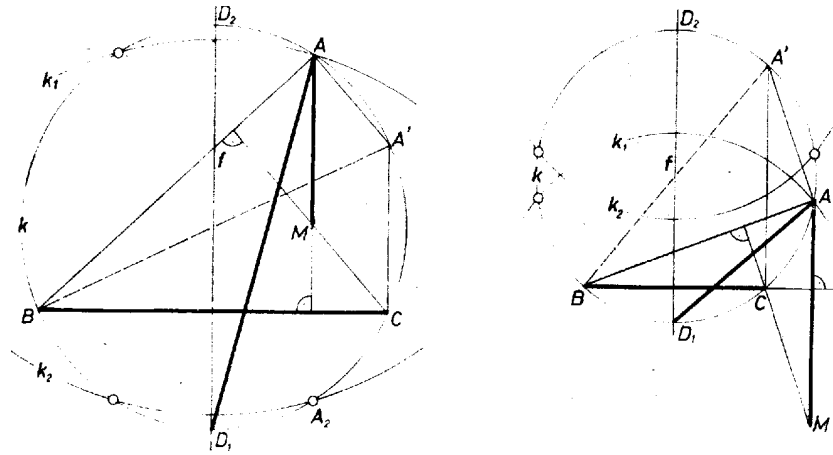


Toljuk el az MA szakaszt úgy, hogy a magasságpont a C csúcsba jusson, és legyen A új helyzete A' . Ekkor egyrészt $A'C \parallel AM \perp BC$, másrészt $A'A \parallel CM \perp BA$, vagyis A' a BC -re C -ben és BA -ra A -ban állított merőlegesek metszéspontja, tehát Thalész tételének megfordítása alapján azonos az ABC háromszög köré írt k kör B -ből kiinduló átmérőjének végpontjával. Eszerint a BC és $CA' = MA$ szakaszokból mint befogókból szerkesztett derékszögű háromszög körülírt köre éppen k . (Mondjuk ki mindjárt: k bármely BC , MA adatpár esetén létrejön, $MA = 0$ esetén átmérője maga BC , ami viszont természetesen nem lehet 0.)



A D pont – értelmezésénél fogva – k -nak az A -t nem tartalmazó BC ívén keletkezik. És mivel a BAD és DAC egymással egyenlő szögek k -nak a BD , DC ívén nyugvó kerületi szögei (természetesen azokat a BD , DC íveket értve, amelyek az A -t nem tartalmazó BC ív részei), azért e két ív egyenlő egymással. Így a BD , DC húrok is egyenlők, tehát D szerepére csak az a D_1 és D_2 pont alkalmas, ahol a BC szakasz f felező merőlegese metszi k -t (más szóval D_1 és D_2 a BC -re merőleges átmérő végpontjai). És folytatólag az A csúcs nem lehet máshol, mint azokon a k_i körökön ($i = 1, 2$), melyeknek középpontja D_i és sugaruk egyenlő az előírt DA szakasszal, vagyis k és k_i valamelyik közös pontjában. Ezzel a szerkesztést befejeztük.

Amennyiben k és k_i közös pontja a BC egyenesnek D_i -t nem tartalmazó partján adódik, akkor a közös pont megfelel A szerepére, és az ABC háromszög megfelel a feladat követelményeinek, mert így az ABC háromszög M magasságpontjára a fenti megfontolás szerint teljesül $MA = CA'$, másrészt BC és DA hossza is az előírás szerinti.

Ha a D_i pontot véve, a DA hosszúságra teljesül $D_iB < DA < D_1D_2$, akkor k_i két különböző pontban metszi k -t, de a keletkező két háromszög egymástól nem lényegesen különböző, hiszen egymás tükörképei f -re. Ha $DA = D_1D_2 = BA'$, akkor egyenlő szárú háromszöget kapunk eredményül. Ha pedig $DA \leq D_iB$ vagy $DA > BA'$, akkor k_i nem ad megoldást.

Mint már említettük, előfordulhat az adathármasban az $AM = 0$ érték is (viszont akár $BC = 0$, akár $DA = 0$ eleve elfajult esetet jelent). Ilyenkor M azonos A -val, a BAC szög derékszög, BC átmérő, D_1 és D_2 egymás tükörképei BC -re, ezért eleve elég D_1 -gyel foglalkoznunk.

Mindezek szerint a feladatnak legfőljebb 2 lényegesen különböző (nem egybevágó) megoldása van.

Megjegyzések. 1. A megoldhatóság fenti feltétele megadható az adatokat tartalmazó egyenlőtlenséggel is, hiszen D_1B és D_2B könnyen kifejezhetők a BC , AM hosszúságokkal.

2. Megszerkeszthetjük k -t a háromszög Euler-féle egyenesére ismert tétel alapján is. Jelöljük k középpontját, súlypontját és a BC oldal felezőpontját rendre O , S , F betűvel. AF és OM az S -ben metszik egymást és $OF \parallel MA$, így SOF és SMA középpontosan hasonló háromszögek. Továbbá $SF = SA/2$, így $OF = MA/2$, a BOF derékszögű háromszög megszerkeszthető.

Buza Antal (Dunaújváros, Münnich F. Gimn.)