

A bal oldal tekinthető egy p tagú mértani sorozat összegének. Könnyen látható ez, miután a törtet bővítjük az $x^{2p/q}$ hatvánnyal és bevezetjük az $x^{1/q} = u$ és $y^{1/q} = v$ jelöléseket (tehát u és v is pozitív számok):

$$(2) \quad \frac{x^{p/q} - y^{p/q}}{x^{1/q} - y^{1/q}} = \frac{u^p - v^p}{u - v} = u^{p-1} \frac{\left(\frac{v}{u}\right)^p - 1}{\frac{v}{u} - 1} = u^{p-1} + u^{p-2}v + \dots + uv^{p-2} + v^{p-1}.$$

Új jelölésünkkel a jobb oldal $p (uv)^{p-1/2}$.

$p = 1$ esetében mindkét oldal értéke 1, ekkor tehát az állításbeli egyenlőtlenség helyett egyenlőség érvényes. (A bal oldalra már (2) második alakjából látható, hogy $p = 1$ esetében 1-gyel egyenlő, hiszen az $x \neq y$ föltevés alapján $u \neq v$.) Ezt figyelembe véve a $p \geq 2$ megszorítással fogjuk bizonyítani a fenti átalakítások alapján osztással adódó, az eredetivel ekvivalens alábbi állítást:

$$(3) \quad \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{p-1}{2}} + \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{p-3}{2}} + \dots + \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{p-3}{2}} + \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{p-1}{2}} > p,$$

ahol az $u/v \neq 1$, pozitív szám.

A bal oldal előlről és hátulról számított ugyanazon sorszámú tagjai egymás reciprokai. Az ilyen $2 - 2$ tagot $1 - 1$ párba kapcsolva, mindegyik pár összege nagyobb 2-nél, ugyanis ha c az 1-től különböző pozitív szám, akkor

$$(4) \quad c + \frac{1}{c} = \frac{c^2 + 1}{c} = \frac{(c-1)^2}{c} + 2 > 2.$$

Eszerint ha p páros: $p = 2k$, akkor a párok száma k , és így a B bal oldal nagyobb $2k$ -nál, tehát (3) érvényes. Ha pedig p páratlan: $p = 2k + 1$, akkor is k számú párt kapunk és B -nek középső, pár nélkül maradó tagja 1, tehát $B > 1 + 2k = p$.

Azt bizonyítottuk tehát be, hogy ha $x \neq y$ pozitív számok, p természetes szám, továbbá $q \neq 0$, racionális szám, akkor

$$\frac{x^{-p/q} - y^{p/q} \cdot x^{-2p/q}}{x^{(1-2p)/q} - y^{1/q} \cdot x^{-2p/q}} \geq p(xy)^{(p-1)/2q}$$

és egyenlőség csak $p = 1$ esetén teljesül (ugyanis a q értékészletének most mondott bővítése még mindig biztosítja az u, v pozitív számok létezését).

Balogh Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A fenti átalakítások után úgy is kapunk (1)-gyel ekvivalens állítást, ha a két oldalt p -vel osztjuk:

$$\frac{1}{p} (u^{p-1} + u^{p-2}v + \dots + v^{p-1}) > (uv)^{(p-1)/2}.$$

Ez pedig igaz a p számú, különböző pozitív szám számtani és mértani közepére ismert egyenlőtlenség alapján, ugyanis a bal oldali zárójelbeli tagok szorzatában u és v kitevője egyaránt

$$(p-1) + (p-2) + \dots + 1 + 0 = p \cdot \frac{p-1}{2},$$

és innen a p tényező a mértani közepet előállító gyökvonással tűnik el.

Horváth Mária (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn., III. o. t.)

Korda Zsuzsa (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Lényegében (4)-ben is a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget használtuk fel, 2 tagra.