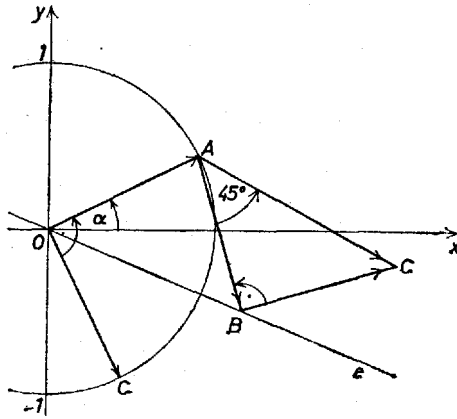


Legyen a megadott egyenes e . A BC rudat a B pontban a feladat feltételeinek megfelelően kétféleképpen csatlakoztathatjuk AB -hez, attól függően, hogy az ABC irányított szög $+90^\circ$ vagy -90° . Mi most azzal az esettel foglalkozunk, amikor az irányított szög (-90°) . A másik esetet az e egyenesre való tükrözéssel vezethetjük vissza erre az esetre.

Legyen az OA vektor és az x tengely által alkotott szög α és rögzítsük az A pontot. A B pont általában két különböző helyzetet vehet fel. Számítsuk ki mindkét esetben a C pont koordinátáit!



1. ábra

1. Ha a B és O pont egybeesik, akkor OA -t (-90°) -kal elfordítva kapjuk meg OC -t, így C koordinátái

$$(1) \quad \begin{aligned} C_x &= \cos(\alpha - 90^\circ) = \sin \alpha; \\ C_y &= \sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos \alpha. \end{aligned}$$

2. Ha B és O nem esik egybe, akkor B helyzete már egyértelmű. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AC}$, valamint $\overrightarrow{OX}$ irányított félegyenesek szögét! $\overrightarrow{OB}$ -t $+22,5^\circ$ -kal elfordítva kapjuk meg OA -t, mert az e egyenes az x tengellyel $\arctg \frac{1 - \sqrt{2}}{1} = -22,5^\circ$ szöget zár be. Az AOB háromszög egyenlő szárú, azért $\overrightarrow{OB}$ irányított félegyenesét $-(\alpha + 22,5^\circ)$ -kal elfordítva kapjuk meg $\overrightarrow{AB}$ -t, $\overrightarrow{AB}$ -t pedig $+45^\circ$ -kal elfordítva kapjuk meg $\overrightarrow{AC}$ -t. Így $\overrightarrow{OX}$ -et $(-22,5^\circ - \alpha - 22,5^\circ + 45^\circ) = -\alpha$ szöggel elfordítva kapjuk meg $\overrightarrow{AC}$ -t, azaz az általuk bezárt szög éppen $-\alpha$. Az $\overrightarrow{AC}$ vektor hossza az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögből $\sqrt{2}$, így az $\overrightarrow{AC}$ vektor

$$\overrightarrow{AC} = (\sqrt{2} \cos(-\alpha), \sqrt{2} \sin(-\alpha)).$$

Az $\overrightarrow{OA}$ $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ vektorhoz az $\overrightarrow{AC}$ vektort hozzáadva, éppen a C pont koordinátáit kapjuk meg:

$$\begin{aligned} C_x &= \cos \alpha + \sqrt{2} \cos(-\alpha) = (\sqrt{2} + 1) \cos \alpha; \\ C_y &= \sin \alpha + \sqrt{2} \sin(-\alpha) = (\sqrt{2} - 1) \sin \alpha; \end{aligned}$$

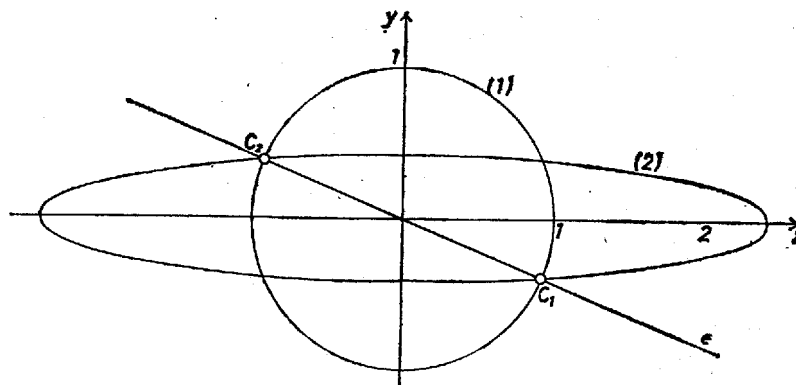
Azt kaptuk tehát, hogy a C pont minden α -ra, az (1) vagy (2) egyenletekkel leírt görbéken található: Az (1) egyenlettel meghatározott görbe éppen az egységsugarú kör. A (2) egyenlet viszont egy ellipszist ad meg:

$$x = (\sqrt{2} + 1) \cos \alpha, \quad y = (1 - \sqrt{2}) \sin \alpha$$

választással a

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2} + 1)^2} + \frac{y^2}{(1 - \sqrt{2})^2} = 1$$

egyenletű ellipszistről van szó.



2. ábra

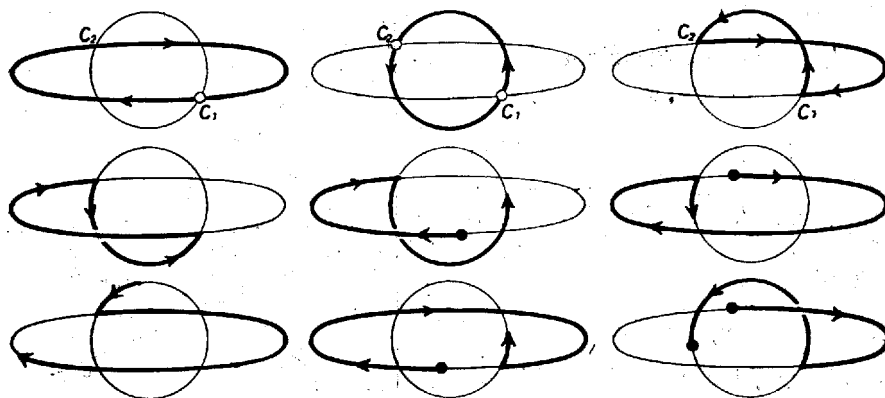
Az A pontnak végig kell futnia az egységgörön. Ez éppen azt jelenti, hogy az α szög valamely értékből kiindulva 360° -os intervallumon fut végig. Az előbb láttuk, hogy eközben a C pont két görbe valamelyikén fut. Azonban a C pont pályája folytonos vonal lesz, így, az egyik görbéről a másikra csak akkor léphet át, ha valamely α -ra (1) és (2) ugyanazt a pontot adja:

$$\sin \alpha = (\sqrt{2} + 1) \cos, \quad \text{valamint} \quad -\cos \alpha = (1 - \sqrt{2}) \sin \alpha.$$

Mindkét egyenlőség akkor teljesül, ha

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} + 1, \quad \alpha = 67,5^\circ + k \cdot 180^\circ.$$

Az $\alpha = 67,5^\circ$ -hoz tartozó pontot C_1 -gyel, az $\alpha = 67,5^\circ + 180^\circ$ -hoz tartozó pontot C_2 -vel jelöltük meg. Amennyiben a α $67,5^\circ$ -tól $67,5^\circ + 180^\circ$ -ig változik, úgy az (1) görbén a C pont C_1 -től C_2 -ig pozitív irányban fut végig; a (2) görbén a C pont C_1 -től C_2 -ig negatív irányban fut végig. Hasonlóan a másik intervallumra is.



3. ábra

Összefoglalva, ha feltesszük, hogy az A pozitív irányban fut körbe az egységsugarú körön, akkor a C pont pályája a következők valamelyike lehet (3. ábra) (természetesen attól függően, hogy hol van a kezdőpont); összesen 20-féle lehetőség.

Balogh Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)