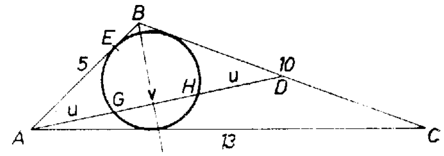
Betűzzük úgy a háromszög csúcsait, hogy legyen $AB = 5$, $BC = 10$, ekkor $CA = 13$. Elég azt belátni, hogy a k beírt kör egy kiszemelt súlyvonalat a kiindulási csúcsától távolabbi harmadoló pontjában metsz át. Válasszuk e célra az A-ból induló AD súlyvonalat, mert így a keletkezett BAD háromszög egyenlő szárú, és k középpontja rajta van ennek szimmetriatengelyén, tehát az AD alapot k két, e tengelyre szimmetrikus pontban metszi.



Legyen e két metszéspont G és H úgy, hogy $AG < AH$, és legyen $AG = DH = u$ és $GH = v$; így azt akarjuk belátni, hogy $u = v$.

k-nak AB-n levő érintési pontját E-vel jelölve ismert összefüggésekből

$$AE = \frac{1}{2}(AB + AC - BC) = 4 \text{ egység},$$

eszerint az ismert $AG \cdot AH = AE^2$ összefüggésből

$$u(u+v) = 16. \tag{1}$$

Másrészt a súlyvonalra ismert összefüggésből

$$AD^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2) = 72 = 2 \cdot 6^2, \text{ tehát}$$

$$AD = AG + GD = u + (u+v) = 6\sqrt{2}.$$

Ezt (1)-gyel egybevetve látjuk, hogy u és $(u+v)$ az

$$x^2 - 6\sqrt{2}x + 16 = 0$$

egyenlet gyökei. Éspedig $v \geq 0$ alapján u a kisebbik gyöke: $u = 2\sqrt{2} = AD/3 = HD$, tehát H valóban a súlypont. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Turán György (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A beírt körnek a súlyponton való áthaladását biztosító föltétellel általában foglalkozott lapunk 1966. évi pályázata.[1] Azt találták a pályázók, hogy a kérdéses tulajdonságnak szükséges és elegendő föltétele az oldalak közti

$$5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(ab + ac + bc)$$

egyenlőség. Ez esetünkben is teljesül. Megadta továbbá a pályázat mindazokat az egész oldalú háromszögeket, amelyeknek megvan ez a tulajdonsága:

$$a = \left[\left(\frac{u-v}{2}\right)^2 + v^2\right] \cdot t, \quad b = \left[\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + v^2\right] \cdot t, \quad c = \frac{u^2+v^2}{2} \cdot t,$$

ahol u, v páratlan, egymáshoz relatív prím természetes számok és t tetszés szerinti természetes szám. Esetünket $u = 5$, $v = 1$, $t = 1$ adja meg.

2. A szóban forgó háromszög alakjával foglalkozott az F. 1638. feladat is.[2]

3. A beküldők többnyire koordinátageometriai bizonyítást adtak.

---

[1] *Fred Ervin-Bakos Tibor-Tusnádi Gábor:* Jelentés a K. M. L. 32. kötetének 5. számában közzétett pályázatáról. K. M. L. 34 (1967) 205–212.

[2] Lásd a megoldást a K. M. L. 39 (1969) 109–110.