I. megoldás. Az egyenlőtlenség bal oldalán a gyökjel alatt az x, y, z számok

$$M = \sqrt[3]{xyz}$$

mértani közepének a köbe és

$$S = \frac{x+y+z}{3}$$

számtani közepe szerepel. A jobb oldalon szereplő

$$P = (x+y)(y+z)(z+x)$$

szorzat e közepeken kívül a

$$H = \frac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} = \frac{3xyz}{xy+yz+zx}$$

harmonikus középpel hozható kapcsolatba:

$$P = 2xyz + x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 =$$
$$= (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz = \frac{9SM^3}{H} - M^3.$$

Ezek szerint (1) az x, y, z számok számtani, mértani és harmonikus közepére az

$$\sqrt[4]{M^3S} \le \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9SM^3}{H} - M^3}$$

egyenlőtlenséget jelenti, amit a pozitív M-mel osztva a

$$\sqrt[4]{\frac{S}{M}} \le \frac{1}{2}\sqrt[3]{9\frac{S}{H} - 1}$$

állítást kapjuk. Ez viszont nyilvánvaló következménye a $H \le M \le S$ egyenlőtlenség-láncnak:

$$\sqrt[4]{\frac{S}{M}} \le \sqrt[4]{\frac{S}{H}} \le \sqrt[3]{\frac{S}{H}} \le \frac{1}{2}\sqrt[3]{8\frac{S}{H} + \left(\frac{S}{H} - 1\right)} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9S}{H} - 1}.$$

(1)-ben akkor érvényes az egyenlőség jele, ha itt mindenütt egyenlőség áll, azaz ha $H = M = S$, vagyis $x = y = z$.

Megjegyzés. Megoldásunkban felhasználtuk a $H \le M$ egyenlőtlenséget. Ez a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből következik úgy, hogy azt az $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, számokra alkalmazzuk:

$$\frac{1}{M} = \sqrt[3]{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{H}.$$

II. megoldás. Egy észrevétellel visszavezetjük feladatunkat az F. 1782. feladatban bebizonyított egyenlőtlenségre. A jobb oldali gyök alatti tényezők tekinthetők egy háromszög oldalainak, mert bármelyik kettőnek az összege nagyobb a harmadiknál, pl.

$$\frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} = \frac{x+z}{2} + y > \frac{x+z}{2}.$$

Legyenek tehát a tényezők rendre:

$$\frac{x+y}{2} = a, \quad \frac{y+z}{2} = b, \quad \frac{z+x}{2} = c,$$

ekkor a háromszög kerületének fele, valamint ennek többlete az egyes oldalakkal szemben

$$\frac{a+b+c}{2} = s = \frac{x+y+z}{2},$$
$$s-a = \frac{z}{2}, \quad s-b = \frac{x}{2}, \quad s-c = \frac{y}{2},$$

és a háromszög t területére vonatkozó $t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ képletet is figyelembe véve az (1) állítás így írható:

$$\sqrt[4]{\frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{3}} = \sqrt[4]{\frac{16t^2}{3}} \le \sqrt[3]{abc}.$$

Ezt négyzetre emelve (a nagyságviszony változatlan marad, mert mindkét oldal pozitív), majd átszorozva

$$\sqrt{\frac{16t^2}{3}} = \frac{4t}{\sqrt{3}} \le \sqrt[3]{a^2b^2c^2}, \quad 4t \le \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

aminek a helyességét az 1782. feladatban bebizonyítottuk.

Turán György (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)