I. megoldás. Az egyenlőtlenség bal oldalán a gyökjel alatt az x, y, z számok

$$M=\sqrt[3]{xyz}$$

mértani közepének a köbe és

$$S=\frac{x+y+z}{3}$$

számtani közepe szerepel. A jobb oldalon szereplő

$$P=(x+y)(y+z)(z+x)$$

szorzat e közepeken kívül a

$$H=\frac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=\frac{3xyz}{xy+yz+zx}$$

harmonikus középpel hozható kapcsolatba:

$$P=2xyz+x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2=$$
$$=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz=\frac{9SM^3}{H}-M^3.$$

Ezek szerint (1) az x, y, z számok számtani, mértani és harmonikus közepére az

$$\sqrt[4]{M^3S}\le\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9SM^3}{H}-M^3}$$

egyenlőtlenséget jelenti, amit a pozitív M-mel osztva a

$$\sqrt[4]{\frac{S}{M}}\le\frac{1}{2}\sqrt[3]{9\frac{S}{H}-1}$$

állítást kapjuk. Ez viszont nyilvánvaló következménye a $H\le M\le S$ egyenlőtlenség-láncnak:

$$\sqrt[4]{\frac{S}{M}}\le\sqrt[4]{\frac{S}{H}}\le\sqrt[3]{\frac{S}{H}}\le\frac{1}{2}\sqrt[3]{8\frac{S}{H}+\left(\frac{S}{H}-1\right)}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9S}{H}-1}.$$

(1)-ben akkor érvényes az egyenlőség jele, ha itt mindenütt egyenlőség áll, azaz ha $H=M=S$, vagyis $x=y=z$.

Megjegyzés. Megoldásunkban felhasználtuk a $H\le M$ egyenlőtlenséget. Ez a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből következik úgy, hogy azt az $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, számokra alkalmazzuk:

$$\frac{1}{M}=\sqrt[3]{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}}\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{H}.$$

II. megoldás. Egy észrevétellel visszavezetjük feladatunkat az F. 1782. feladatban bebizonyított egyenlőtlenségre. A jobb oldali gyök alatti tényezők tekinthetők egy háromszög oldalainak, mert bármelyik kettőnek az összege nagyobb a harmadiknál, pl.

$$\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}=\frac{x+z}{2}+y>\frac{x+z}{2}.$$

Legyenek tehát a tényezők rendre:

$$\frac{x+y}{2}=a,\quad\frac{y+z}{2}=b,\quad\frac{z+x}{2}=c,$$

ekkor a háromszög kerületének fele, valamint ennek többlete az egyes oldalakkal szemben

$$\frac{a+b+c}{2}=s=\frac{x+y+z}{2},$$
$$s-a=\frac{z}{2},\quad s-b=\frac{x}{2},\quad s-c=\frac{y}{2},$$

és a háromszög t területére vonatkozó $t^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$ képletet is figyelembe véve az (1) állítás így írható:

$$\sqrt[4]{\frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{3}}=\sqrt[4]{\frac{16t^2}{3}}\le\sqrt[3]{abc}.$$

Ezt négyzetre emelve (a nagyságviszony változatlan marad, mert mindkét oldal pozitív), majd átszorozva

$$\sqrt{\frac{16t^2}{3}}=\frac{4t}{\sqrt{3}}\le\sqrt[3]{a^2b^2c^2},\quad 4t\le\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

aminek a helyességét az 1782. feladatban bebizonyítottuk.

Turán György (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)