

I. megoldás. $n = 1, 2, 3$ esetében rendre

$$\begin{aligned} b_1 = a_1 &= \frac{19}{24} & \left(= 1 - \frac{5}{24} = 1 - \frac{5}{3 \cdot 2 \cdot 2^2} \right), \\ b_2 = b_1 + a_2 &= \frac{15}{16} & \left(= 1 - \frac{1}{16} = 1 - \frac{6}{3 \cdot 4 \cdot 2^3} \right), \\ b_3 = b_2 + a_3 &= \frac{313}{320} & \left(= 1 - \frac{7}{320} = 1 - \frac{7}{4 \cdot 5 \cdot 2^4} \right). \end{aligned}$$

Látjuk, hogy a b_n sorozat monoton növekvő – hiszen $a_n > 0$ –, és b_3 alulról közelíti az 1-et. Erre támaszkodva írtuk fel b_1, b_2, b_3 értékét $1 - h$ alakban, ahol a h hiány értéke $1/4, 8, 1/16, 1/45, 7$, tagról tagra kisebb, másrészt $a_4 < h_3$, tehát $b_4 < 1$ is áll.

Azt várjuk, hogy a $h_n = 1 - b_n$ kifejezés egyszerűen előállítható n függvényeként. Mivel h_n -et természetes számokból számítjuk ki, a h_1 és h_3 számlálójában álló 5, ill. 7 számban $(n + 4)$ -et sejtjük, a nevezők szerkezetére pedig az $(n + 1)(n + 2) \cdot 2^{n+1}$ szorzatot. Erősíti várakozásunkat, hogy bővítéssel h_2 is ilyen alakra hozható (lásd a zárójelbeli továbbalakításokat).

Teljes indukcióval bebizonyítjuk ezekből kiindulva, hogy

$$(1) \quad b_n = 1 - \frac{n + 4}{(n + 1)(n + 2) \cdot 2^{n+1}}.$$

Valóban, ha valamely n -re ez teljesül, akkor

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n + a_{n+1} = \\ &= 1 - \left(\frac{n + 4}{(n + 1)(n + 2) \cdot 2^{n+1}} - \frac{(n + 4)^2 + 3}{(n + 1)(n + 2)(n + 3) \cdot 2^{n+2}} \right) = \\ &= 1 - \frac{(n + 4)\{2n + 6 - (n + 4)\} - 3}{(n + 1)(n + 2)(n + 3) \cdot 2^{n+2}}, \end{aligned}$$

a számláló

$$(n + 4)(n + 2) - 3 = n^2 + 6n + 5 = (n + 1)(n + 5),$$

tehát

$$b_{n+1} = 1 - \frac{n + 5}{(n + 2)(n + 3) \cdot 2^{n+2}},$$

amint vártuk. Ezzel zárt kifejezést kaptunk b_n -re (azaz olyat, amely nem tartalmaz $\sum$ jelet, „...” jelet, vagyis közbülső tagok kiszámítása nélkül bármely n -re direkt kiszámíthatóvá teszi b_n -et).

Megmutatjuk (1) alapján, hogy a b_n sorozat 1-hez konvergál. Valóban, $n \geq 4$ esetén, bármely előre megadott $\varepsilon > 0$ esetében

$$|1 - b_n| = |h_n| = \frac{n + 4}{(n + 1)(n + 2) \cdot 2^{n-1}} < \frac{2n}{n \cdot n \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

mihelyt $n > 1/\varepsilon$.

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk, a feladatot megoldottuk.

Pallagi Dezső (Budapest, Berzsényi D. Gimn., III. o. t.)

Kovács István (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Az $(n + 3)^2 + 3 = n^2 + 6(n + 2)$ azonosság alapján az a_n tag így alakítható:

$$\begin{aligned} 2^{n+1}a_n &= \frac{n^2}{n(n + 1)(n + 2)} + \frac{6(n + 2)}{n(n + 1)(n + 2)} = \\ &= \frac{n}{(n + 1)(n + 2)} + \frac{6}{n(n + 1)} = n \left(\frac{1}{n + 1} - \frac{1}{n + 2} \right) + 6 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1 + n} \right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n + 1} \right) - \left(1 - \frac{2}{n + 2} \right) + \frac{6}{n} - \frac{6}{n + 1} = \frac{6}{n} - \frac{7}{n + 1} + \frac{2}{n + 2}. \end{aligned}$$

Eszerint

$$(2) \quad a_n = \frac{3}{n \cdot 2^n} - \frac{7}{(n + 1) \cdot 2^{n+1}} + \frac{1}{(n + 2) \cdot 2^n},$$

vagyis a_n eredeti nevezőjének n , $n+1$, $n+2$ tényezői a háromtagú összegnek csak 1–1 tagjában szerepelnek.

A $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ összes tagjait (2) alapján felbontva olyan törteket kapunk, amelyek nevezőjében $k \cdot 2^k$ alakú szorzatok állnak. Általában $k \cdot 2^k$ nevezőjű tört az a_i sorozat három tagjának felbontásában keletkezik, az

$$\begin{aligned} a_{k-2} &= \frac{3}{(k-2) \cdot 2^{k-2}} - \frac{7}{(k-1) \cdot 2^{k-1}} + \frac{4}{k \cdot 2^k}, \\ a_{k-1} &= \frac{3}{(k-1) \cdot 2^{k-1}} - \frac{7}{k \cdot 2^k} + \frac{4}{(k+1) \cdot 2^{k+1}}, \\ a_k &= \frac{3}{k \cdot 2^k} - \frac{7}{(k+1) \cdot 2^{k+1}} + \frac{4}{(k+2) \cdot 2^{k+2}} \end{aligned}$$

felbontásokból. Mivel az $a_{k-2} + a_{k-1} + a_k$ összegben az $\frac{1}{k \cdot 2^k}$ tag együtthatója $(4 - 7 + 3) = 0$, azért a $k \cdot 2^k$ nevezőjű törtek összege a teljes $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ összegben 0. Igaz ez mindazokra a k természetes számokra, amelyekre a_{k-2} , a_{k-1} , a_k a fenti összegben valóban előfordul, vagyis amelyekre $3 \leq k \leq n$ teljesül. Ezeken kívül a b_n -et előállító összegben még a $k = 1, 2$ és a $k = n+1$, $n+2$ számokból kapott $k \cdot 2^k$ nevezőjű törtek szerepelnek, tehát b_n egyenlő ezek összegével:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{7}{2 \cdot 2^2} + \frac{3}{2 \cdot 2^2} + \frac{4}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} - \frac{7}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} + \frac{4}{(n+2) \cdot 2^{n+2}} = \\ &= 1 - \frac{3}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} + \frac{4}{(n+2) \cdot 2^{n+2}}. \end{aligned}$$

(A $k = 1$ érték mellett csak a_1 , a $k = 2$ mellett a_1 és a_2 , a $k = n+1$ érték mellett a_{n-1} és a_n , végül $k = n+2$ mellett csak a_n felbontását kellett figyelembe vennünk a fenti összeg felírásához.)

Ebből pedig $\lim b_n = 1$, mert a második és a harmadik tag határértéke 0.

Csetényi Artúr (Szeged, Radnóti M. Gimn., IV. o. t.)
Dombovári Tamás (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)