

$$(1) \quad \frac{s_a^2}{bc} + \frac{s_a^2}{ca} + \frac{s_a^2}{ab} \geq \frac{9}{4}.$$

**I. megoldás.** A súlyvonalak kifejezhetők az oldalakkal. Tükrözve a háromszöget az  $a$  oldal felezőpontjára, a kapott paralelogramma oldalai  $b$  és  $c$ , átlói  $a$  és  $2s_a$ . A Pitagorasz-tétel ismételt alkalmazásával könnyen adódik, hogy paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalainak négyzetösszegével, tehát esetünkben

$$a^2 + 4s_a^2 = 2(b^2 + c^2), \quad s_a^2 = (2b^2 + 2c^2 - a^2)/4.$$

Ezt és  $s_b^2$ ,  $s_c^2$  hasonló kifejezését (1)-be helyettesítve,  $4abc$ -vel szorozva, rendezve, az adódó

$$a(2b^2 + 2c^2 - a^2) + b(2c^2 + 2a^2 - b^2) + c(2a^2 + 2b^2 - c^2) - 9abc \geq 0$$

egyenlőtlenség ekvivalens az állítással.

A bal oldalt tovább alakítva

$$2a(b-c)^2 + 2b(c-a)^2 + 2c(a-b)^2 - (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \geq 0,$$

illetve mivel a kivonandó négytagú így írható:

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\},$$

azért elég ezt bizonyítanunk:

$$(2) \quad (b-c)^2 \left(2a - \frac{a+b+c}{2}\right) + (c-a)^2 \left(2b - \frac{a+b+c}{2}\right) + (a-b)^2 \left(2c - \frac{a+b+c}{2}\right) \geq 0.$$

A kifejezés szimmetriája alapján választhatjuk úgy a háromszög oldalainak betűzését, hogy  $a \geq b \geq c (> 0)$ . Ekkor (2) bal oldalának első két szorzata nem negatív, hiszen

$$(3) \quad 2a - \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}(a + (a-b) + (a-c)) > 0, \\ 2b - \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}(2b + b - a - c) \geq \frac{1}{2}(2c + b - a - c) = \frac{1}{2}(b + c - a) > 0.$$

A (2) harmadik szorzata,  $P_3$  lehet negatív is; megmutatjuk azonban, hogy a  $P_2$  második szorzat és  $P_3$  összege nem negatív. Valóban, (3) alapján  $P_2$ -ben  $(c-a)^2$  helyére  $(b-a)^2$ -t írva nem növelünk:

$$P_2 + P_3 \geq (b-a)^2 \left(2b - \frac{a+b+c}{2}\right) + (a-b)^2 \left(2c - \frac{a+b+c}{2}\right) = (a-b)^2(b+c-a),$$

ebből állításunk nyilvánvaló és ezzel az előrebocsátottak szerint (1)-et bebizonyítottuk.

**II. megoldás.** Az 1856. feladat megoldásából közbülső eredményként kiolvashatjuk,<sup>1</sup> hogyha  $A, B, C$  egy háromszög csúcsai, ennek oldalai  $AB = c$ ,  $BC = a$  és  $CA = b$ ,  $P$  a tér tetszőleges pontja,  $\alpha, \beta, \gamma$  pozitív számok, akkor

$$\alpha \cdot PA^2 + \beta \cdot PB^2 + \gamma \cdot PC^2 \geq \frac{\alpha\beta c^2 + \beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Legyenek most a súlyok

$$\alpha = \frac{1}{bc}, \quad \beta = \frac{1}{ca}, \quad \gamma = \frac{1}{ab},$$

másrészt speciálisan  $P$ -ként az  $ABC$  háromszög súlypontját véve

$$PA = \frac{2}{3}s_a, \quad PB = \frac{2}{3}s_b, \quad PC = \frac{2}{3}s_c$$

és ezeket beírva a feladat állítását kapjuk.

<sup>1</sup>Lásd ezen számban, a 122. oldalon, (5)-ben, ahol  $\alpha, \beta$  és  $\gamma$  speciális értékeit még nem vettük figyelembe.