

**I. megoldás.** Helyettesítsük  $K$  számlálójába a háromszög szögeinek a cosinustétel alapján az oldalakkal való kifejezéseit és hozzunk közös nevezőre:

$$a \cos \alpha + b \cos \beta - c \cos \gamma = \frac{1}{2abc} \{a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(c^2 + a^2 - b^2) - c^2(a^2 + b^2 - c^2)\} = \frac{c^4 - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)}{2abc} = \frac{(c^2 - a^2 + b^2)(c^2 + a^2 - b^2)}{2abc} = 2c \cos \alpha \cos \beta.$$

(Az utolsó lépésben ismét a cosinustételt használtuk fel.)

Eredményünkéből  $a$ ,  $b$  és  $c$  oldalaknak – és ennek megfelelően a  $\beta$  és  $\gamma$  szögeknek a felcserélésével kapjuk, hogy  $K$  nevezője  $2b \cos \alpha \cos \gamma$ -val egyenlő. Ebből egyrészt az következik, hogy  $K$  csak akkor van értelmezve, ha sem  $\alpha$ , sem  $\gamma$  nem derékszög, másrészt kapjuk, hogy ha  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ,  $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$ , akkor

$$K = \frac{c \cos \beta}{b \cos \gamma}.$$

Ezt a sinustétel alapján tovább egyszerűsíthetjük:

$$K = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \gamma \operatorname{ctg} \beta.$$

**II. megoldás.** A  $2r = a/\sin \alpha = b/\sin \beta = c/\sin \gamma$  és ismert goniometriaival összefüggések alapján  $K$ -t átalakítva kapjuk, hogy

$$K = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta + \sin 2\gamma} = \frac{\sin 2\alpha + 2 \cos(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma)}{\sin 2\alpha + 2 \cos(\beta + \gamma) \sin(\gamma - \beta)} = \frac{\sin \alpha - \sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha - \sin(\gamma - \beta)} = \frac{\sin(\beta + \gamma) - \sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta + \gamma) - \sin(\gamma - \beta)} = \frac{\cos \beta \sin \gamma}{\sin \beta \cos \gamma} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Közben  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  alapján felhasználtuk, hogy  $\cos(\beta + \gamma) = -\cos \alpha$  és hogy  $\sin \alpha = \sin(\beta + \gamma)$ . Mivel a harmadik alakban  $\cos \alpha$ -val egyszerűsítettünk, átalakításunk akkor érvényes, ha  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ , és  $K$  utolsó alakja akkor van értelmezve, ha  $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$ .

Könnnyen látható, hogy ha akár  $\alpha$ , akár  $\gamma$  derékszög, akkor  $K$  eredeti alakjában is 0-val egyenlő a nevező.

*Megjegyzés.* Mivel  $K$  számlálója is, nevezője is hosszúság, azért maga  $K$  pusztán szám, csak a szögektől, a háromszög alakjától függhet. Így természetes, hogy a végső alakban csak két szög lépjen föl, hiszen már két szög meghatározza a háromszög alakját.