

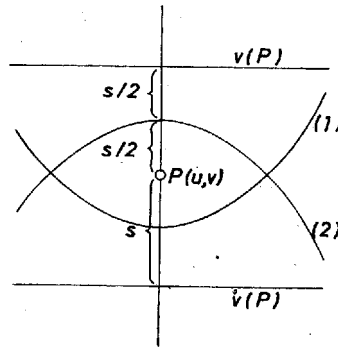
I. megoldás. A feladatot koordináta-geometriai módszerrel oldjuk meg. A koordináta-rendszert úgy választjuk meg, hogy az adott parabola egyenlete $y = x^2$ legyen. Ekkor a parabola d vezéregyenesének egyenlete $y = -\frac{1}{4}$. Egy $P(u, v)$ fókuszú, d -vel párhuzamos vezéregyenesű parabola egyenlete, amennyiben a vezéregyenes és fókusz távolsága s , vagy

$$(1) \quad y = \frac{1}{2s}(x - u)^2 + v - \frac{s}{2},$$

vagy pedig

$$(2) \quad y = -\frac{1}{2s}(x - u)^2 + v + \frac{s}{2},$$

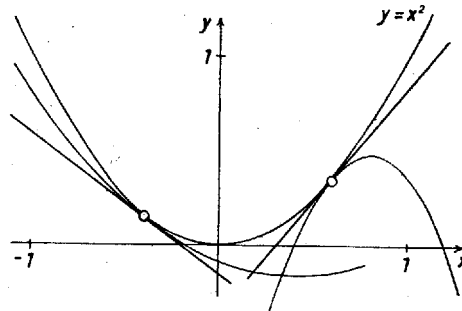
aszerint, hogy a parabola fókusza a vezéregyenes „felett” vagy „alatt” helyezkedik el (1. ábra).



1. ábra

Vizsgáljuk meg, hogy mely $P(u, v)$ pontok esetén fogja az (1) parabola érinteni az $y = x^2$ parabolát.

Két görbe akkor érinti egymást, ha van közös pontjuk, és a két görbéhez abban a pontban húzott érintők egybeesnek (2. ábra).



2. ábra

Ha a két parabola érinti egymást az x abszcisszájú pontban, akkor az abban a pontban húzott érintők iránytangenseinek meg kell egyeznie. És fordítva: ha ezek megegyeznek, akkor a két görbe érinti egymást.

Az $y = x^2$ görbéhez az x abszcisszájú pontban húzott érintő iránytangense $y' = 2x$; az (1) görbéhez húzott érintő iránytangense $y' = \frac{1}{s}(x - u)$. Ennek a két értéknek kell megegyeznie:

$$(3) \quad \begin{aligned} 2x &= \frac{1}{s}(x - u), \\ (1 - 2s)x &= u. \end{aligned}$$

Ha már most $2s \neq 1$, akkor ebből $x = u/(1 - 2s)$, azaz csak az ilyen abszcisszájú pontban érintheti egymást a két parabola. Ha viszont az $x = u/(1 - 2s)$ pontban a paraboláknak közös pontja van, akkor ott érintik is egymást. Tehát $(2s - 1) \neq 0$ esetén a két parabola csak akkor érinti egymást, ha

$$\left(\frac{u}{1 - 2s}\right)^2 = \frac{1}{2s}\left(\frac{u}{1 - 2s} - u\right)^2 + v - \frac{s}{2},$$

azaz ha u és v között a

$$(4) \quad v = \frac{1}{1-2s} \cdot u^2 + \frac{s}{2}$$

összefüggés áll fenn.

Ha viszont $2s = 1$, akkor (3) csak úgy állhat fenn, ha $u = 0$, ekkor viszont az (1) parabolaegyenlet $y = x^2 + v - \frac{1}{4}$ alakú lesz. Így $2s - 1 = 0$ esetén az (1) parabola, valamint az $y = x^2$ parabola $v \neq \frac{1}{4}$ mellett nem érinti egymást, $v = \frac{1}{4}$ mellett pedig azonosak; innen nem kapunk megoldást.

Hasonlóan azt vizsgálva, hogy a (2) parabola és az $y = x^2$ parabola mikor érinti egymást, a $2x = -\frac{1}{s}(x - u)$ -ból az $x = u/(2s + 1)$ abszcisszájú pontban lehet csak érintés, és ez $2s + 1 \geq 1$ miatt mindig értelmes. Így a (2) parabola és az $y = x^2$ parabola csak akkor érinti egymást, ha

$$\left(\frac{u}{2s+1}\right)^2 = -\frac{1}{2s} \left(\frac{u}{2s+1} - u\right)^2 + v + \frac{s}{2},$$

vagyis ha

$$(5) \quad v = \frac{1}{1+2s} \cdot u^2 - \frac{s}{2}$$

Összefoglalva, a $P(u, v)$ ponthoz akkor és csak akkor találunk a feladatban előírt tulajdonságú parabolát, ha (5) teljesül, vagy ha $2s - 1 \neq 0$ és (4) teljesül. Így a keresett mértani hely $2s - 1 \neq 0$ esetén az

$$(5') \quad y = \frac{1}{1+2s} \cdot x^2 - \frac{s}{2},$$

és az

$$(4') \quad y = \frac{1}{1-2s} \cdot x^2 + \frac{s}{2}$$

egyenletek valamelyikét kielégítő pontok (két parabola), míg $2s - 1 = 0$ esetén csak az

$$(5'') \quad y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}$$

egyenletet kielégítő pontok (egy parabola).

Megvizsgáljuk, hogyan származnak a kapott parabolák az $y = x^2$ parabolából és az adott s szakaszból. Az adott parabola csúcsa a $(0; 0)$ pont, fókusz $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$, vezéregyenes $y = -\frac{1}{4}$ egyenes; a (4')

parabola csúcsa $\left(0; \frac{s}{2}\right)$ – ahol $s \neq \frac{1}{2}$ –, paraméternek fele

$$\frac{1}{4} \left| \frac{\frac{1}{1-2s}}{1} \right| = \left| \frac{1}{4} - \frac{s}{2} \right|.$$

Mármint, ha $0 < 2s < 1$, akkor (4') fókuszának ordinátája: $\frac{s}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{s}{2}\right) = \frac{1}{4}$, vagyis e fókusz azonos F -fel; vezéregyenes pedig az

$$y = \frac{s}{2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{s}{2}\right) = -\frac{1}{4} + s$$

egyenes, a kiindulási parabola vezéregyenesének eltoltja s -sel (fölfelé). Mivel ekkor még $s < 1/2$, azért a föltolt vezéregyenes még alatta van F -nek, fölfelé nyílik a parabola.

Ha viszont $2s > 1$, azaz $s/2 > 1/4$, akkor (4') csúcsa az F fölött van (egyszersmind x^2 együtthatója negatív), a parabola lefelé nyílik, fókusz s -szal lejjebb van, mint a csúcs. E fókusz ordinátája

$$\frac{s}{2} - \left| \frac{1}{4} - \frac{s}{2} \right| = \frac{s}{2} - \left(\frac{s}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4},$$

tehát ekkor is azonos F -fel, vezéregyenesre $y = -\frac{1}{4} + s$, ekkor is s -sel van föltolva. (De ekkor túl van tolva az F -en.) A kizárt $2s = 1$ eset pedig azt jelentené, hogy az $y = x^2$ parabola vezéregyenesét rátolnánk a fókuszára; emiatt nem keletkezik ilyenkor P mértani helye az (1) alakból.

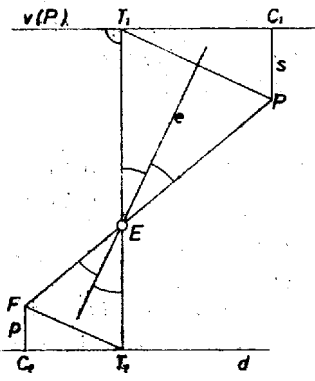
Hasonlóan látható – de egyszerűbben –, hogy (5') csúcsa minden pozitív s -re a $(0; -s/2)$ pont, fókusza F , vezéregyenesre $y = -1/4 - s$, vagyis lefelé van eltolva s -sel.

II. megoldás. A feladatot koordináta-rendszer alkalmazása nélkül is megoldjuk. A megoldásban felhasználjuk azt a tényt, hogy a parabola érintője felezi az érintési pontot a fókusszal összekötő egyenes, valamint az érintési pontból a vezéregyenesre emelt merőleges szögét.

Legyen az adott parabola fókusza F , a fókusz és a d vezéregyenes közti távolság p . Tegyük fel, hogy a P fókuszú, v vezéregyenesű parabola a megadott parabolát az E pontban érinti, azaz a két parabolához E pontban közös, e érintő húzható. Mivel a feltétel szerint v és d párhuzamos, ezért az E pontból v -re, illetve d -re bocsátott merőlegesek T_1 , illetve T_2 talppontjai és az E pont egy egyenesen vannak.

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a T_1T_2 szakasz belsejében tartalmazza az E pontot vagy sem.

I. Ha E a T_1T_2 szakasz belső pontja, akkor F és P az e egyenes különböző oldalára esik, azaz $FP = FE + EP$. A PT_1C_1 és az FT_2C_2 háromszögek (lásd a 3. ábrát) hasonlóak, mert megfelelő oldalai párhuzamosak.



3. ábra

Hasonlóságuk aránya $PC_1 : FC_2 = s : p$. Hasonlók a PET_1 , valamint FET_2 háromszögek is, hasonlóságuk aránya $PT_1 : FT_2 = s : p$, azaz $EP : FE = s : p$, ahonnan

$$\frac{FP}{FE} = \frac{FE + EP}{FE} = 1 + \frac{EP}{FE} = 1 + \frac{s}{p}.$$

Így a P pontot az E pontból F középpontú, $\left(1 + \frac{s}{p}\right)$ arányú nagyítással kapjuk. Ez azt jelenti, hogy a keresett tulajdonságú P pontok rajta vannak az eredeti parabola F középpontú, $\left(1 + \frac{s}{p}\right)$ arányú nagyítottján.

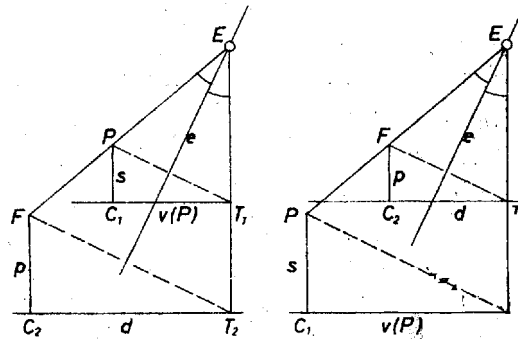
Megmutatjuk, hogy ennek a parabolának összes pontja rendelkezik a tulajdonsággal, hogy egy alkalmas parabolának fókusza.

Legyen ugyanis P a nyújtott parabola egy pontja. Mivel P az eredeti parabola egy E pontjának képe, azért $FP : FE = 1 + \frac{s}{p}$ és F, E, P ilyen sorrendben vannak az egyenesen, tehát $EP : EF = s : p$.

Legyen továbbá E merőleges vetülete d -re T_2 , F merőleges vetülete C_2 és tükrözzük E -re az FC_2T_2 háromszöget, majd nyújtsuk meg s/p -szeresére. Az F pont ekkor a P pontba fog átmenni, a T_2 , illetve C_2 pontok pedig T_1 , illetve C_1 pontokba. T_1C_1 párhuzamos lesz T_2C_2 -vel, hiszen a tükrözés és hasonlóság párhuzamosságtartó, továbbá $EP = ET_1$, hiszen ez az egyenlő szárú FET_2 háromszög tükrözöttje, illetve nagyítottja. $PC_1 = \frac{s}{p} \cdot FC_2 = \frac{s}{p} \cdot p = s$, vagyis az E pont rajta van a P fókuszú, T_1C_1 vezéregyenesű parabolán, és P , valamint T_1C_1 távolsága éppen s . Másrészt F, E, P , valamint T_2, E, T_1 egy egyenesre esnek, azért mind a két parabolához az E pontban húzott érintő ugyanaz, az FET_2 szög vagy a PET_1 szög szögfelezője.

Így beláttuk, hogy a feladatbeli mértani hely – abban az esetben, ha T_1T_2 szakasznak az E pont belső pontja – a megadott parabolának F középpontú, $1 + s/p$ arányú nagyítottja.

II. Ez az eset hasonló az előzőhöz, azért itt csak utalunk az egyes lépésekre (4. ábra).



4. ábra

Az F , valamint P pontok az e egyenesnek ugyanarra a partjára esnek, így irányított szakaszokat nézve $FP = FE - PE$. A PT_1C_1 , valamint az FT_2C_2 háromszögek, majd a PET_1 és FET_2 háromszögek hasonlóságából $PE : FE = s : p$, ahonnan

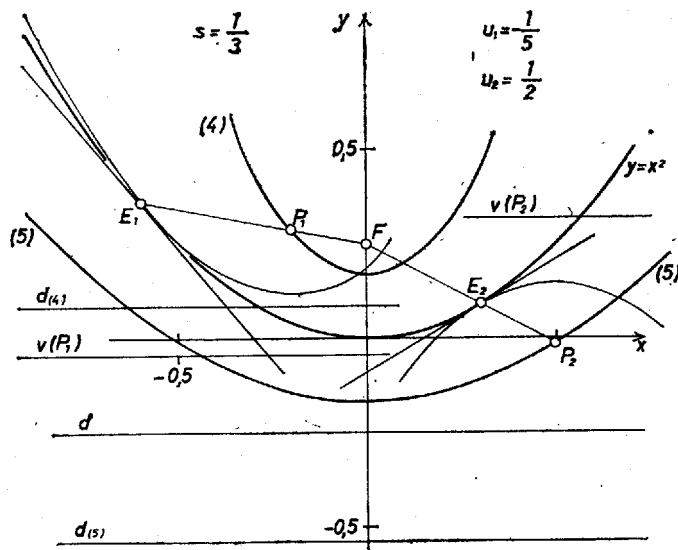
$$\frac{FP}{FE} = \frac{FE - PE}{FE} = 1 - \frac{s}{p}$$

pozitív arány esetén, ez egy F középpontú, adott arányú hasonlósági transzformációt jelent, ha negatív, akkor még egy F pontra vonatkozó tükrözést is. Amennyiben az arány nulla, úgy azt kapjuk, hogy a két parabola fókusza, vezéregyese egybeesik, tehát a két parabola is egybeesik, ekkor viszont nem érintik egymást.

Így a második esetben a mértani hely $s \neq p$ esetén az adott parabola F középpontú, $\left(1 - \frac{s}{p}\right)$ arányú nagyítottja. Most is az előzőekhez hasonlóan meg lehet mutatni, hogy ennek a megnyújtott parabolának minden pontja eleme a mértani helynek. $s = p$ esetben pedig megfelelő pont nincs.

Összefoglalva: ha $s \neq p$, akkor a keresett mértani hely a megadott parabola F középpontú, $1 + s/p$, illetve $1 - s/p$ arányú nagyítottjainak uniója. Ha $s = p$, akkor az eredeti parabola F középpontú, 2-szeres nagyítottja.

Kovács István (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.)



5. ábra

Az 5. ábra az $s = 1/3$ értékhez tartozó parabolapárt tünteti fel (vastagon rajzolva), továbbá az első parabolán a $-1/5$ abszcisszájú P_1 , a másodikon az $1/2$ abszcisszájú P_2 ponthoz tartozó kívánt $v(P_1)$, $v(P_2)$ vezéregyeneset, végül az ezekből kapott, az $y = x^2$ parabolát érintő parabolákat (vékonyan rajzolva).