

Egy kis kockának legfeljebb három lapja lehet piros, hiszen 4 lap között mindig van két párhuzamos is, és ezek közül nem festhettük meg mind a kettőt. Három piros lapjuk van azoknak, amelyeknek van közös csúcsuk a nagy kockával, ilyen tehát összesen 8 van. Mivel ezek a legjobban festett kockák, nincs náluk jobban festett szomszédjuk, ez a 8 kocka a b) szempont szerint ugyanabba az osztályba tartozik. Az olyan kockákra, amelyeknek nincs olyan szomszédjuk, amelynek eggyel több piros lapjuk van, röviden azt fogjuk mondani, hogy nincs jobban festett szomszédjuk.

Biztosan van két piros lapjuk azoknak a kockáknak, amelyeknek egyik élük a nagy kockának is éle. Ha ezek közül elhagyjuk a már figyelembe vett 8-at, minden él mentén $(n - 2)$ marad vissza. Ezek közül a két szélső a 8 sarok-kocka szomszédja, tehát minden él mentén $(n - 4)$ olyan kocka van, amelyiknek nincs jobban festett szomszédja, és a 12 él mentén összesen $12(n - 4)$ ilyen kocka van. Azoknak a száma pedig, amelyeknek két festett lapjuk van, és van jobban festett szomszédjuk, élenként 2, összesen 24. (A felsoroltak között nincs olyan kocka, amely két nagy élhez tartozna, hiszen ekkor sarok-kocka volna, azokat pedig már nem vesszük számításba.)

Egy festett lapjuk van azoknak a kockáknak, amelyeknek van közös lapjuk a nagy kockával és még nem kerültek sorra. Minden lapon a szélső kockák szerepeltek eddig, ha ezeket elhagyjuk, minden sorban $(n - 2)$ kocka marad, összesen $(n - 2)^2$. Ezek között ismét a szélsőknek van jobban festett szomszédjuk (és az mindig olyan, hogy pontosan eggyel több festett lapja van); ha ezeket is elhagyjuk, minden sorban $(n - 4)$ kocka marad, laponként tehát $(n - 4)^2$ olyan kocka van, amelyiknek egy piros lapja van, és nincs jobban festett szomszédja. Az ilyen kockák száma így $6(n - 4)^2$, azoké pedig, amelyeknek van jobban festett szomszédjuk, a visszamaradó

$$6[(n - 2)^2 - (n - 4)^2] = 24(n - 3).$$

Ha elhagyjuk a már számba vett kockákat, soronként, oszloponként és mélységben $(n - 2)$ kocka marad vissza, ezek száma együtt $(n - 2)^3$. Közülük a szélsőknek (amelyeknek van közös lapjuk a visszamaradó kockák által alkotott, $(n - 2)$ egységnyi élű kockával) van olyan szomszédjuk, amelyiknek egy piros lapjuk van. Ha ezeket is elhagyjuk, egy $(n - 4)$ egységnyi élű (tehát $n \geq 5$ miatt nem üres) kocka marad vissza, ebben $(n - 4)^3$ kocka van: ezeknek nincs piros lapjuk és nincs jobban festett szomszédjuk. Végül a még számba nem vett

$$(n - 2)^3 - (n - 4)^3 = 6n^2 - 36n + 56$$

számú kockának nincs piros lapja, de van jobban festett szomszédja.

Eredményeinket a következő táblázatban foglaljuk össze. Eszerint a kockákat hét nem üres osztályba soroltuk:

A festett lapok száma	Van jobban festett szomszédja	Nincs jobban festett szomszédja
3	-	8
2	24	$12(n - 4)$
1	$24(n - 3)$	$6(n - 4)^2$
0	$6n^2 - 36n + 56$	$(n - 4)^3$