I. Legyen rövidítésül

$$\sin^n x = \xi, \tag{3}$$
$$\cos^n y = \eta. \tag{4}$$

Ekkor

$$\xi\eta = \frac{1}{2}\left\{(\xi+\eta)^2 - (\xi^2+\eta^2)\right\} = \frac{v^2-u}{2},$$

tehát ξ és η a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$(z-\xi)(z-\eta) = z^2 - (\xi+\eta)z + \xi\eta = z^2 - vz + \frac{v^2-u}{2} = 0. \tag{5}$$

Innen akkor és csak akkor kapunk olyan megoldást, amely mellett (3) és (4) egyidejűleg megoldást ad x-re, és y-ra, ha (5) mindkét gyöke valós és fennáll

$$n = 2k \quad \text{esetén} \quad 0 \le \xi,\ \ \eta \le 1, \tag{6a}$$
$$n = 2k+1 \text{ esetén } -1 \le \xi,\ \ \eta \le 1, \tag{6b}$$

hiszen bármely x, y szám sinusa és cosinusa -1 és 1 közé eső szám, és n-edik hatványuk n páros vagy páratlan volta szerint 0 és 1 közé, ill. -1 és 1 közé esik – a két határt mindig megengedve.

Mivel (5)-ben a másodfokú tag együtthatója pozitív, azért az

$$f(z) = z^2 - vz + \frac{v^2-u}{2} = \left(z - \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{v^2-2u}{4}$$

függvénynek minimuma van a $\frac{v}{2}$ helyen, és ennek értéke $\frac{v^2-2u}{4}$. Ismeretes, hogy (5) gyökei akkor és csak akkor valósak, ha e minimum nem pozitív:

$$v^2 - 2u \le 0, \qquad v^2 \le 2u. \tag{7}$$

Annak szükséges és elegendő feltételei pedig, hogy $(6a)$, ill. $(6b)$ teljesüljön a gyökökre:
egyrészt, hogy a minimum helye a (0, 1), ill. (−1, 1) intervallumban legyen:

$$0 \le \frac{v}{2} \le 1, \qquad \text{azaz} \quad 0 \le v \le 2, \ \text{ill.} \tag{8a}$$
$$-1 \le \frac{v}{2} \le 1, \qquad \text{azaz} \ -2 \le v \le 2, \tag{8b}$$

másrészt hogy az intervallum mindkét végpontjában $f(z)$ értéke már nem negatív legyen. Eszerint minden n-re

$$f(1) = 1 - v + \frac{v^2-u}{2} = \frac{1}{2}\Big\{(v-1)^2 - (u-1)\Big|\Big\} \ge 0, \ \text{azaz}$$
$$(v-1)^2 \ge (u-1), \tag{9}$$

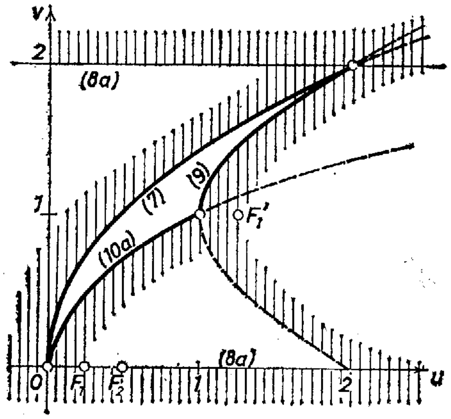
továbbá n párossága szerint

$$f(0) = \frac{v^2-u}{2} \ge 0, \quad \text{azaz} \quad v^2 \ge u, \ \text{ill.} \tag{10a}$$
$$f(-1) = \frac{1}{2}\Big\{(v+1)^2 - (u-1)\Big\} \ge 0, \ \text{azaz} \ (v+1)^2 \ge u-1. \tag{10b}$$

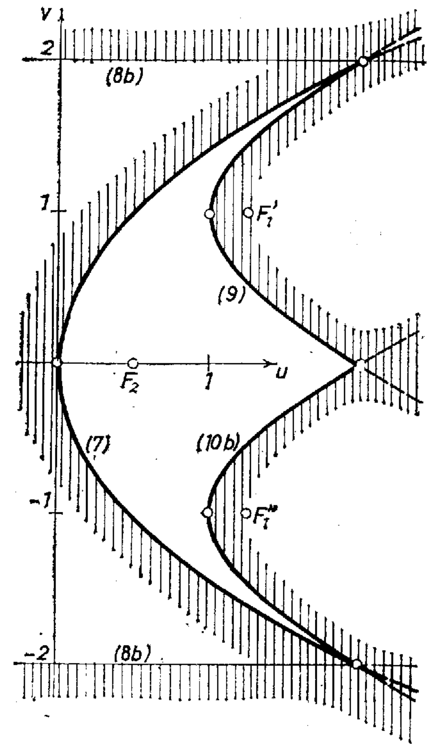
2. Az eddigiek szerint a kívánt tulajdonságú $P(u, v)$ pontok koordinátáinak minden n esetén teljesíteniük kell a (7) és (9) feltételeket, továbbá páros n esetén a $(8a)$, $(10a)$ feltételpárt, páratlan n esetén pedig a $(8b)$, $(10b)$ párt; és fordítva, ha adott n esetén egy P pont koordinátái teljesítik a megfelelő négy feltételt, ez elegendő is ahhoz, hogy az (1), (2) rendszernek legyen megoldása, ekkor tehát P hozzátartozik a mértani helyhez.

Mármost $(8a)$ és $(8b)$ egy-egy az x tengellyel párhuzamos síksávot jelölnek ki. – Ha $(10a)$ az egyenlőség jelével teljesül, akkor P a $v^2 = u$ egyenletű parabolán van rajta, vagyis azon, melynek csúcsa az origó, fókusza az $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ pont; ha pedig a bal oldal nagyobb – ahol az ordináta áll –, akkor a parabola külsejében van P, vagyis a parabolavonal által kettévágott síknak a fókuszt nem tartalmazó részében. – Akkor is parabolán van P, ha (9), ill. $(10b)$ teljesül az egyenlőség jelével, ezek az előbbiből azzal az eltolással adódnak, amely csúcsát az (1, 1), ill. (1, −1) pontba viszi; egyenlőtlenség esetén pedig ismét a megfelelő parabola külsejéről van szó.

Végül hasonlóan (7) az origó csúcsú és $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ fókuszú parabola vonalán és a belsejében levő pontokra és csak ezekre teljesül.



1a.



1b.

Az $1a$ ábrán páros n-ekre, az $1b$ ábrán páratlanokra tüntettük fel a megfelelő sávhatár-egyeneseket, parabolákat, és mellettük vonalkázással jelöltük a keletkezett síkrészek közül azokat, amelyek pontjai nem teljesítik az illető feltételt. Így a mind a négy feltételt teljesítő síkrész jelöletlenül, fehéren maradt, ez és a határvonala adja a keresett mértani helyet.

Breuer Péter (Eger, Gárdonyi G. Gimn., IV. o. t.)
Kollár István (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)