

I. megoldás. Gondoljuk, hogy lemezünk vastagsága 1 mm, hogy ilyenből már vágunk ki sok 5 cm átmérőjű körlemezt és most az a feladatunk, hogy ezekből minél többet rakjunk bele egy $100 \times 9 \times 0,1$ cm méretű (mondjuk, átlátszó anyagból készült) dobozba, ennek $9 \times 0,1$ cm méretű oldalnyílásán át. Ez nyilvánvalóan ekvivalens feladat az eredetivel. – Állítsuk a dobozt függőlegesen úgy, hogy a nyílás legyen a fedőlap, így kézenfekvő ezt mondani: a nehézségi erő biztosítja, hogy az egymás után becsúsztatott lemezek a lehető legmélyebben és együttvéve legsűrűbben helyezkedjenek el.

Az elsőnek betett K_1 lemez O_1 középpontja 2,5 cm magasan lesz az alap fölött. A következő K_2 lemez O_2 középpontja K_1 miatt valahol az O_1 körüli 5 cm sugarú körön lesz, de O_1 -nél magasabban – mert 2 lemez nem fér el úgy, hogy középpontjuk egyenlő magasan legyen –, és akkor jut legmélyebbre O_2 , ha K_2 a K_1 -et nekitolja valamelyik oldalfalnak (I), maga pedig a másik oldalfalhoz (II) támaszkodik. Ekkor az O_1O_2 centrális vízszintes vetülete $9 - 2 \cdot 2,5 = 4$ cm, O_1 és O_2 magasságkülönbsége Pitagorasz tétele alapján 3 cm, tehát K_1 legmagasabb pontja 5 cm, K_2 -é 8 cm magasságban van az alap fölött.

Könnyű belátni, hogy bármelyik K_i lemez O_i középpontja a hozzá közelebbi oldalfaltól legalább 2,5 cm távolságra van, és így az O_i középpontok annak a síksávnak a belsejében vagy a határán vannak, melyet a doboz középmetszet-téglalapjában a hosszú oldalaktól 2,5 cm távolságban húzott párhuzamosok határolnak; távolságuk a már mondott 4 cm.

Beejtve K_3 -at, ez nem érintheti K_1 -et, mert ehhez K_2 -t is érintenie kellene, márpedig az $O_1O_2O_3$ szabályos háromszög legkisebb szélessége (annak a párhuzamos egyenespárnak a távolsága, melyek közé a háromszög beilleszthető) $2,5\sqrt{3} = 4,33$ cm > 4 cm. Így K_3 legmélyebb helyzetét K_2 és az I. oldalfal ugyanúgy határozza meg, mint K_2 -ét K_1 és a II. oldalfal.

Tovább haladva, n lemez bedobása és legmélyebb elhelyezkedése után a lemezrendszer legmagasabb pontja $5 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 2$ cm magasan lesz az alap fölött. n csak addig növelhető, míg ez nem lépi túl a 100-at: $3n + 2 \leq 100$, és innen a legnagyobb értéke 32. Látható, hogy ez meg is valósítható.

Megjegyzés. A fenti megoldás szemléletes, gyakorlati megfontolásra fordította át a „legfőljebb hány db” kérdését. A következő szép megoldás kizárólag matematikai eszközöket használ, tanulságos benne az egyenlőtlenségek kezelése.

II. megoldás. a) Legyen S egy tetszőleges szabásterv, azaz legyen S az adott téglalapon elhelyezett, egymásba nem nyúló körök halmaza, és legyen S_0 az S -beli körök középpontjainak a halmaza. Helyezzük lemezünket egy koordináta-rendszerbe úgy, hogy egyik csúcsa az origóba kerüljön, az ebből kiinduló oldalak a koordináta-tengelyek pozitív irányú félegyenesekre kerüljenek, a 100 cm-es oldal az x tengelyre. Az S_0 -beli középpontok (x, y) koordinátáira

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2,5 \leq x \leq 97,5, \\ (2) \quad & 2,5 \leq y \leq 6,5 \end{aligned}$$

teljesül, hiszen az S -beli körök a téglalapban vannak; továbbá két tetszőleges S_0 -beli (x', y') , (x'', y'') középpontra

$$(3) \quad (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 \geq 25$$

teljesül, hiszen az S -beli körök nem nyúlnak egymásba.

Két tetszőleges S_0 -beli pont ordinátájának a különbsége (2) alapján legfeljebb $6,5 - 2,5 = 4$, azaz

$$(4) \quad |y' - y''| \leq 4.$$

Ebből és (3)-ból következik, hogy

$$\begin{aligned} (5) \quad & (x' - x'')^2 \geq 25 - 16 = 9, \\ & |x' - x''| \geq 3, \end{aligned}$$

azaz két tetszőleges, S_0 -beli pont abszcisszájának a különbsége legalább 3. Eszerint az S_0 -beli pontok abszcisszái különbözőek, és ha nagyság szerint rendezve őket x_i az i -edik abszcissza, akkor

$$(6) \quad x_{i+1} - x_i \geq 3, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

ahol n az S -beli körök száma. Összeadva az $i = 1, 2, \dots, n-1$ indexekhez tartozó (6) alakú egyenlőtlenségeket, kapjuk:

$$x_n - x_1 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - x_1) \geq 3(n-1).$$

Viszont (1) szerint $x_n - x_1 \leq 95$, tehát

$$3(n-1) \leq 95,$$

azaz $n \leq 32$. Eszerint a lemezből legfeljebb 32 körlapot vágunk ki.

b) Megmutatjuk, hogy ennyit ki is tudunk vágni. Legyen ugyanis

$$x_i = 2,5 + 3(i - 1),$$
$$y_i = \begin{cases} 2,5 & \text{ha } i \text{ páratlan} \\ 6,5 & \text{ha } i \text{ páros,} \end{cases}$$

$(i = 1, 2, \dots, 32)$, akkor ezekre az (x_i, y_i) pontokra teljesül (1), (2) és (3), tehát az (x_i, y_i) középpontú köröket ki lehet vágni a téglalapból.