

A $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} (90^\circ - x) = 1$ összefüggés alapján (1)-ben $\operatorname{tg} 75^\circ$ és $\operatorname{tg} 85^\circ$ helyére $\operatorname{tg} 15^\circ$ és $\operatorname{tg} 5^\circ$ reciprokát írhatjuk, így a törtek eltávolítása után az (1)-gyel ekvivalens

$$(2) \quad \operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ = \operatorname{tg} 15^\circ$$

állításunkat. A jobb oldalon álló 15° háromszorososa a bal oldalon szereplő 5° -nak, így célszerűnek látszik az 55° -ot és 65° -ot $(60^\circ - 5^\circ)$, $(60^\circ + 5^\circ)$ alakban előállítani:

$$\operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 5^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ} = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 5^\circ}.$$

(Közben felhasználtuk, hogy $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.) Eszerint (2) ekvivalens a

$$(3) \quad \frac{3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 5^\circ} \cdot \operatorname{tg} 5^\circ = \operatorname{tg} 3 \cdot 5^\circ$$

állításunkkal, ami az 5° helyén tetszőleges x szögre igaz, hiszen

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} \cdot \operatorname{tg} x$$

(természetesen feltéve, hogy $\operatorname{tg} 3x$ értelmezve van). Az állítást ezzel bebizonyítottuk.

Megjegyzések. Hasonlóan jutunk eredményre az $55^\circ = 30^\circ + 25^\circ$, $65^\circ = 90^\circ - 25^\circ$, $75^\circ = 3 \cdot 25^\circ$ és $60^\circ + 25^\circ = 85^\circ$ észrevételek, valamint a $\operatorname{tg} 30^\circ = 1/\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ értékek alapján, két-két négyzet különbségét szorzattá alakítva.

2. A bebizonyított állítás mindkét oldalán a reciprokokra áttérve a (talán még tetszetősebb) következőt kapjuk: $\operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} 5^\circ$.