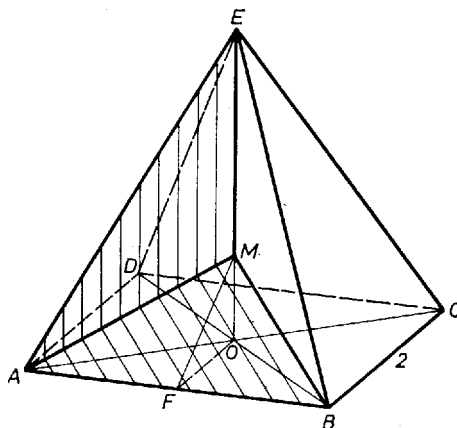


I. megoldás. Válasszuk hosszúságegységnek az alapél felét, legyen a gúla magassága $OE = m$ (az adott $AE : AB = 2$ aránytól egyelőre eltekintve) és $OM = x$ (> 0).



1. ábra

Így, az AB él felezőpontját F -fel jelölve $FM = \sqrt{x^2 + 1}$, másrészt $AO = \sqrt{2}$, és a vizsgálandó területösszeg (1. ábra)

$$t(x) = AF \cdot FM + \frac{1}{2} ME \cdot AO = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{m - x}{\sqrt{2}},$$

ha $0 < x \leq m$. Ennek deriváltja

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + 1}},$$

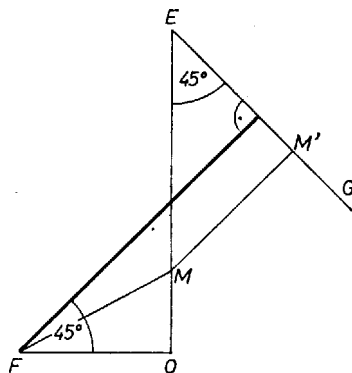
és ez csak akkor tűnik el, ha $\frac{1}{x^2} = 1$, $x = 1$, csak itt lehet szélső érték, amennyiben $x = 1$ beletartozik az értelmezési tartományba – ti. $AE/AB = 2$, azaz $AE = 4$ esetén is.

Látható, hogy ha $0 < x < 1$, akkor $t'(x) < 0$, ha pedig $x > 1$, akkor $t'(x) > 0$. Másrészt $AE = 4$ esetén $m = \sqrt{14} > 1$, ezek szerint $x = 1$ -ben minimuma van a területösszegnek.

II. megoldás. Alakítsuk $t(x)$ fenti első kifejezését így:

$$t(x) = AF \left(FM + \frac{ME}{\sqrt{2}} \right),$$

Mivel AF állandó, eszerint x -et úgy kell megválasztanunk, hogy a zárójelbeli két szakasz összege a lehető legkisebb legyen. Szemléletes jelentést adhatunk ennek a feladatnak a gúla FOE síkmetszetében. Rajzoljunk E -n át az EO magassággal 45° -os szöget bezáró EG félegyenest az F -et nem tartalmazó oldalon, és legyen ezen M vetülete M' (2. ábra).



2. ábra

A zárójel második tagja nyilvánvalóan MM' , és a két tag összege az F -től EG -ig megtett utunk, ha EO -ig is és tovább EG -ig is egyenesen haladunk, az utóbbi részben EG -re merőlegesen. Ez az út nyilvánvalóan akkor a legrövidebb, ha OE átlépésekor nem változtatunk irányt, $OFM \angle = 45^\circ$, tehát ha $OM = OF = 1$.

Megjegyzés. Az utóbbi megoldásban alkalmazott módszer eredményesen használható a következő feladatban is. Adott a síkban egy e egyenes, továbbá rajta egy B és kívül egy A pont. Határozzuk meg e -nek azt a P pontját, melyre a

$$\lambda \cdot AP + \mu \cdot PB$$

összeg minimális, ahol λ, μ tetszőleges pozitív számok.