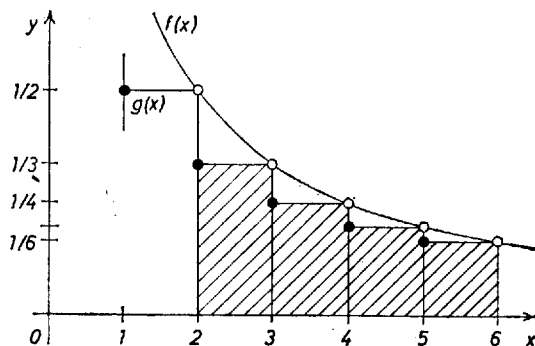


A gyökjel alatt a számlálóval egyszerűsítve, a nevezőben az  $(n+1), (n+2), \dots, 3n$  tényezők maradnak vissza. Mondhatjuk, hogy a gyökjel alatt e számok reciprokának szorzata áll. A tényezők száma  $2n$ , egyezik a gyökkitevővel, tehát a gyök az  $1/(n+1), 1/(n+2), \dots, 1/(3n)$  számok mértani közepét adja, az állítás bal oldala pedig a mértani közép  $(2n)$ -szerese.



Ugyancsak az  $1/(n+1), \dots, 1/(3n)$  számok adják az  $1/x$  integrandusz értékeit az  $x = n+1, n+2, \dots, 3n$  helyeken. Az

$$s = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n}$$

összeg egyenlő annak a  $g(x)$  (lépcsős) függvénynek az  $(n, 3n)$  intervallumban vett integráljával, amely minden  $j$  természetes számra a balról zárt  $(j, j+1)$  intervallumban állandó és  $\frac{1}{j+1}$ -gyel egyenlő. Minden  $j < x < j+1$  mellett  $\frac{1}{x} > \frac{1}{j+1}$ , tehát a  $g(x)$  függvény integrálja kisebb, mint az  $\frac{1}{x}$  integrálja:

$$(2) \quad s = \int_n^{3n} g(x) dx < \int_n^{3n} \frac{dx}{x}.$$

(Ábránk  $n=2$  esetére szemlélteti a mondottakat.) Mondhatjuk tehát, hogy (2) bal oldala a mondott függvényértékek számtani közepének és a tagok számának,  $2n$ -nek a szorzata.

E két észrevételből már következik a feladat állítása a különböző pozitív számok számtani és mértani közepe közötti ismert nagyságviszony alapján:

$$\begin{aligned} \int_n^{3n} \frac{dx}{x} &> 2n \cdot \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n}}{2n} > \\ &> 2n \cdot \sqrt[2n]{\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3n}} = 2n \sqrt[2n]{\frac{n!}{(3n)!}} \end{aligned}$$

Egyenlőség egyik helyen sem állhat a „>” jel helyett.

Kovács István (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.)

*Megjegyzés.* Néhányan az  $n!$ -ra ismert  $\sqrt{2\pi n}(n/e)^n$  közelítő érték (Stirling-formula) alapján próbálták bizonyítani az állítást. Ez körültekintés hiányát mutatja. Nem gondoltak arra, vajon alsó vagy felső közelítő értéket használnak-e fel, tehát fennmarad-e a helyettesítés után az állításbeli egyenlőtlenség.