I. megoldás. Jelöljük meg az adott konvex n-szög csúcsait (pozitív körüljárás szerint) rendre az 1, 2, ..., n számokkal. Minden egyes, a követelményt teljesítő négyes csúcskiválasztásnak megfelel egy olyan számnégyes, amelyben

A) nincs szomszédos (1 különbségű) számpár,

B) nem lép föl együtt az 1 és az n szám.

(Ugyanis szomszédos számok, vagy az 1 és n együttes fellépése azt jelentené, hogy a választott négyszög egyik oldala a sokszögnek is oldala volna.) Fordítva, minden ilyen számnégyesnek megfelel egy, az eredeti követelménynek megfelelő csúcsnégyes. Ezek szerint a kívánt csúcsnégyesek számát megadja az A- és B-tulajdonságú számnégyesek száma. Ez utóbbit úgy határozzuk meg, hogy az A-tulajdonságú számnégyesek $N(A)$ számából levonjuk azoknak az A-tulajdonságú számnégyeseknek az $N(A\overline{B})$ számát, melyeknek nincs meg a B tulajdonságuk.

Az $N(A)$ szám meghatározása lényegében azonos feladat az 1970. évi Kürschák-verseny 2. feladatával[1], csupán a lottószámok 90-es száma helyére kell n-et, és az egyszerre kihúzott lottószámok 5-ös száma helyére 4-et helyettesítenünk. Alkalmazzuk ezekkel a változtatásokkal az idézett helyen olvasható I. megoldás gondolatmenetét.

Jelöljük egy megfelelően kiválasztott számnégyes számait növekvő rendben a-val, b-vel, c-vel, és d-vel, így a számnégyes megfelelő volta ekvivalens az

$$1 \leqq a < a+1 < b < b+1 < c < c+1 < d \leqq n \tag{1}$$

egyenlőtlenség-lánc teljesülésével. Így pedig a

$$b' = b-1, \quad c' = c-2, \quad d' = d-3 \tag{2}$$

jelöléssel teljesül a

$$1 \leqq a < b' < c' < d' \leqq n-3 \tag{3}$$

egyenlőtlenség-lánc is. Fordítva, ha az a, b', c', d' számokra teljesül (3), akkor a belőlük (2) szerint származtatott a, b, c, d számokra teljesül (1). Ezek szerint $N(A)$ egyenlő a (3)-nak eleget tevő számnégyesek számával, vagyis az első $(n-3)$ természetes szánt közül kiválasztható különböző számokból álló (és monoton növekvően elrendezett) számnégyesek számával:

$$N(A) = \binom{n-3}{4}.$$

Ha egy számnégyesnek megvan az A tulajdonsága, de nincs meg a B tulajdonsága, akkor az elemei között szerepel az 1-es és az n, és a másik két elemére

$$3 \leqq b < b+1 \leqq n-2 \tag{4}$$

teljesül, ahol b és c jelöli ezeket az elemeket. A (4)-nek eleget tevő számpárok számát a fentiekhez hasonlóan meghatározva kapjuk, hogy

$$N(A\overline{B}) = \binom{n-5}{2}.$$

Tehát az A- és B-tulajdonságú számnégyesek száma

$$\begin{aligned} N(AB) = N(A) - N(A\overline{B}) &= \binom{n-3}{4} - \binom{n-5}{2} = \\ &= \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!} - \frac{(n-5)(n-6)}{2!} = \\ &= \frac{(n-5)(n-6)}{4!}\left(n^2 - 7n + 12 - 12\right) = \frac{n}{4}\binom{n-5}{3}. \end{aligned}$$

Megjegyzések. **1.** Eredményünk tartalmi szempontból (mind geometriai, mind a végzett számító gondolkodás szempontjából) természetesen csak az $n \geqq 8$ esetekre érvényes. $n = 8$ esetén $N = 2$, az egyik megoldás a páratlan, a másik a páros sorszámú csúcsok kiválasztása. Formailag azonban már $n = 5$ esetén helyes eredményt ad a képlet.

2. Valamivel gyorsabban érünk célhoz a következő ötlet alapján. Jelöljük a kiválasztandó csúcsnégyes által meghatározott négyszög csúcsait (pozitív körüljárás szerint) rendre P-vel, Q-val, R-rel és S-sel. Válasszuk ki *először* a P csúcsot az n-szög csúcsai közül (erre n-féle lehetőségünk van), majd *ezután* számozzuk meg a sokszög csúcsait P-ből indulva pozitív körüljárás szerint. A fenti gondolatmenettel könnyen bizonyítható, hogy a további három csúcs választására $\binom{n-5}{3}$ lehetőségünk van, ezáltal $n\binom{n-5}{3}$ négyszöget kapunk. Így azonban minden egyes négyszöget 4-szer

[1] Mi a valószínűsége annak, hogy egy lottóhúzás öt száma között van legalább két szomszédos (amelyek különbsége 1)? – A megoldást lásd: *Lovász László:* Az 1970. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny feladatainak megoldása. K. M. L. 42 (1971) 193 – 198, ezen belül 195 – 197.

állítunk elő – ennyiféleképpen jelölhetjük meg a csúcsait pozitív körüljárás szerint a P, Q, R, S betűkkel –, tehát a különböző négyszögek száma $\frac{n}{4}\binom{n-5}{3}$.

II. megoldás. Az n-szög csúcsai $\binom{n}{4}$ konvex négyszöget határoznak meg, ezek között azonban olyanok is vannak, melyeknek 3, 2, ill. 1 oldaluk az n-szögnek is oldala. (Mind a 4 oldal csak $n = 4$ esetén lehetne n-szögoldal, de ettől eltekintünk, csak $n \geqq 8$ esetére foglalkozunk a kérdéssel.) Megállapítjuk a mondott egyezési esetek számát és kivonással képezzük a keresett N számot.

a) Négyszögünknek 3 oldala akkor közös az n-szöggel, ha 4 egymás utáni csúcsot választunk ki. Ez azt jelenti, hogy csak az elsőt választjuk – ezt n-féleképpen tehetjük –, a többi 3 erre következik.

b) Ha 2 közös oldaluk van, ez lehet az n-szög 2 szomszédos – vagyis 3 egymás utáni csúcs által alkotott – oldala, vagy 2 távolabb fekvő oldal. Az első módon a 3 egymás utáni csúcsot ismét n-féleképpen választhatjuk meg, a negyedik négyszögcsúcs azonban már nem csatlakozhat ezekhez, ezért $(n-5)$ db n-szögcsúcs közül választható; az ilyen lehetőségek száma tehát $n(n-5)$. A második módon két, az n-szögön szomszédos csúcspárunk lesz. Az első pár első csúcsát ismét n-féleképpen, a második párét $(n-5)$-féleképpen választhatjuk (ha ugyanis az első pár pl. A_{n-1}, A_n, akkor a második pár első csúcsa $A_2, A_3, \ldots, A_{n_4}$ lehet). Az így gondolt $n(n-5)$összekapcsolásban azonban minden keresett kiválasztást 2-szer kapunk meg, az ilyen négyszögek száma tehát $n(n-5)/2$.

c) Végül ha 1 közös oldala van négyszögünknek az n-szöggel, akkor az ennek megválasztása után maradó $(n-4)$ csúcs közül a hátra levő 2 négyszög csúcsot $\binom{n-4}{2}$-féleképpen választhatjuk, ezek azonban $n-5$ esetben szomszédosak egymással, tehát az ide tartozó négyszögek száma:

$$n\left\{\binom{n-4}{2}-(n-5)\right\}=n\binom{n-4}{2}-n(n-5).$$

Mindezek szerint

$$N=\binom{n}{4}-\left\{n+\left(1+\frac{1}{2}-1\right)n(n-5)-n\binom{n-4}{2}\right\}$$

ami kellő alakítás után egyezik az I. megoldás eredményével.