**I. megoldás.** Jelöljük meg az adott konvex $n$-szög csúcsait (pozitív körüljárás szerint) rendre az 1, 2, ..., $n$ számokkal. Minden egyes, a követelményt teljesítő négyes csúcskiválasztásnak megfelel egy olyan számnégyes, amelyben

*A)* nincs szomszédos (1 különbségű) számpár,

*B)* nem lép föl együtt az 1 és az $n$ szám.

(Ugyanis szomszédos számok, vagy az 1 és $n$ együttes fellépése azt jelentené, hogy a választott négyszög egyik oldala a sokszögnek is oldala volna.) Fordítva, minden ilyen számnégyesnek megfelel egy, az eredeti követelménynek megfelelő csúcsnégyes. Ezek szerint a kívánt csúcsnégyesek számát megadja az $A$- és $B$-tulajdonságú számnégyesek száma. Ez utóbbit úgy határozzuk meg, hogy az $A$-tulajdonságú számnégyesek $N(A)$ számából levonjuk azoknak az $A$-tulajdonságú számnégyeseknek az $N(A\overline{B})$ számát, melyeknek nincs meg a $B$ tulajdonságuk.

Az $N(A)$ szám meghatározása lényegében azonos feladat az 1970. évi Kürschák-verseny 2. feladatával[1], csupán a lottószámok 90-es száma helyére kell $n$-et, és az egyszerre kihúzott lottószámok 5-ös száma helyére 4-et helyettesítenünk. Alkalmazzuk ezekkel a változtatásokkal az idézett helyen olvasható I. megoldás gondolatmenetét.

Jelöljük egy megfelelően kiválasztott számnégyes számait növekvő rendben $a$-val, $b$-vel, $c$-vel, és $d$-vel, így a számnégyes megfelelő volta ekvivalens az

$$1 \leqq a < a+1 < b < b+1 < c < c+1 < d \leqq n \tag{1}$$

egyenlőtlenség-lánc teljesülésével. Így pedig a

$$b' = b-1, \quad c' = c-2, \quad d' = d-3 \tag{2}$$

jelöléssel teljesül a

$$1 \leqq a < b' < c' < d' \leqq n-3 \tag{3}$$

egyenlőtlenség-lánc is. Fordítva, ha az $a$, $b'$, $c'$, $d'$ számokra teljesül (3), akkor a belőlük (2) szerint származtatott $a$, $b$, $c$, $d$ számokra teljesül (1). Ezek szerint $N(A)$ egyenlő a (3)-nak eleget tevő számnégyesek számával, vagyis az első $(n-3)$ természetes szánt közül kiválasztható különböző számokból álló (és monoton növekvően elrendezett) számnégyesek számával:

$$N(A) = \binom{n-3}{4}.$$

Ha egy számnégyesnek megvan az $A$ tulajdonsága, de nincs meg a $B$ tulajdonsága, akkor az elemei között szerepel az 1-es és az $n$, és a másik két elemére

$$3 \leqq b < b+1 \leqq n-2 \tag{4}$$

teljesül, ahol $b$ és $c$ jelöli ezeket az elemeket. A (4)-nek eleget tevő számpárok számát a fentiekhez hasonlóan meghatározva kapjuk, hogy

$$N(A\overline{B}) = \binom{n-5}{2}.$$

Tehát az $A$- és $B$-tulajdonságú számnégyesek száma

$$\begin{aligned} N(AB) = N(A) - N(A\overline{B}) &= \binom{n-3}{4} - \binom{n-5}{2} = \\ &= \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{4!} - \frac{(n-5)(n-6)}{2!} = \\ &= \frac{(n-5)(n-6)}{4!}\left(n^2 - 7n + 12 - 12\right) = \frac{n}{4}\binom{n-5}{3}. \end{aligned}$$

*Megjegyzések.* **1.** Eredményünk tartalmi szempontból (mind geometriai, mind a végzett számító gondolkodás szempontjából) természetesen csak az $n \geqq 8$ esetekre érvényes. $n = 8$ esetén $N = 2$, az egyik megoldás a páratlan, a másik a páros sorszámú csúcsok kiválasztása. Formailag azonban már $n = 5$ esetén helyes eredményt ad a képlet.

2. Valamivel gyorsabban érünk célhoz a következő ötlet alapján. Jelöljük a kiválasztandó csúcsnégyes által meghatározott négyszög csúcsait (pozitív körüljárás szerint) rendre $P$-vel, $Q$-val, $R$-rel és $S$-sel. Válasszuk ki *először* a $P$ csúcsot az $n$-szög csúcsai közül (erre $n$-féle lehetőségünk van), majd *ezután* számozzuk meg a sokszög csúcsait $P$-ből indulva pozitív körüljárás szerint. A fenti gondolatmenettel könnyen bizonyítható, hogy a további három csúcs választására $\binom{n-5}{3}$ lehetőségünk van, ezáltal $n\binom{n-5}{3}$ négyszöget kapunk. Így azonban minden egyes négyszöget 4-szer

[1] Mi a valószínűsége annak, hogy egy lottóhúzás öt száma között van legalább két szomszédos (amelyek különbsége 1)? – A megoldást lásd: *Lovász László:* Az 1970. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny feladatainak megoldása. K. M. L. 42 (1971) 193 – 198, ezen belül 195 – 197.

állítunk elő – ennyiféleképpen jelölhetjük meg a csúcsait pozitív körüljárás szerint a $P$, $Q$, $R$, $S$ betűkkel –, tehát a különböző négyszögek száma $\frac{n}{4}\binom{n-5}{3}$.

**II. megoldás.** Az $n$-szög csúcsai $\binom{n}{4}$ konvex négyszöget határoznak meg, ezek között azonban olyanok is vannak, melyeknek 3, 2, ill. 1 oldaluk az $n$-szögnek is oldala. (Mind a 4 oldal csak $n=4$ esetén lehetne $n$-szögoldal, de ettől eltekintünk, csak $n \geqq 8$ esetére foglalkozunk a kérdéssel.) Megállapítjuk a mondott egyezési esetek számát és kivonással képezzük a keresett $N$ számot.

a) Négyszögünknek 3 oldala akkor közös az $n$-szöggel, ha 4 egymás utáni csúcsot választunk ki. Ez azt jelenti, hogy csak az elsőt választjuk – ezt $n$-féleképpen tehetjük –, a többi 3 erre következik.

b) Ha 2 közös oldaluk van, ez lehet az $n$-szög 2 szomszédos – vagyis 3 egymás utáni csúcs által alkotott – oldala, vagy 2 távolabb fekvő oldal. Az első módon a 3 egymás utáni csúcsot ismét $n$-féleképpen választhatjuk meg, a negyedik négyszögcsúcs azonban már nem csatlakozhat ezekhez, ezért $(n-5)$ db $n$-szögcsúcs közül választható; az ilyen lehetőségek száma tehát $n(n-5)$. A második módon két, az $n$-szögön szomszédos csúcspárunk lesz. Az első pár első csúcsát ismét $n$-féleképpen, a második párét $(n-5)$-féleképpen választhatjuk (ha ugyanis az első pár pl. $A_{n-1}$, $A_n$, akkor a második pár első csúcsa $A_2, A_3, \ldots, A_{n_4}$ lehet). Az így gondolt $n(n-5)$összekapcsolásban azonban minden keresett kiválasztást 2-szer kapunk meg, az ilyen négyszögek száma tehát $n(n-5)/2$.

c) Végül ha 1 közös oldala van négyszögünknek az $n$-szöggel, akkor az ennek megválasztása után maradó $(n-4)$ csúcs közül a hátra levő 2 négyszög csúcsot $\binom{n-4}{2}$-féleképpen választhatjuk, ezek azonban $n-5$ esetben szomszédosak egymással, tehát az ide tartozó négyszögek száma:

$$n\left\{\binom{n-4}{2}-(n-5)\right\}=n\binom{n-4}{2}-n(n-5).$$

Mindezek szerint

$$N=\binom{n}{4}-\left\{n+\left(1+\frac{1}{2}-1\right)n(n-5)-n\binom{n-4}{2}\right\}$$

ami kellő alakítás után egyezik az I. megoldás eredményével.