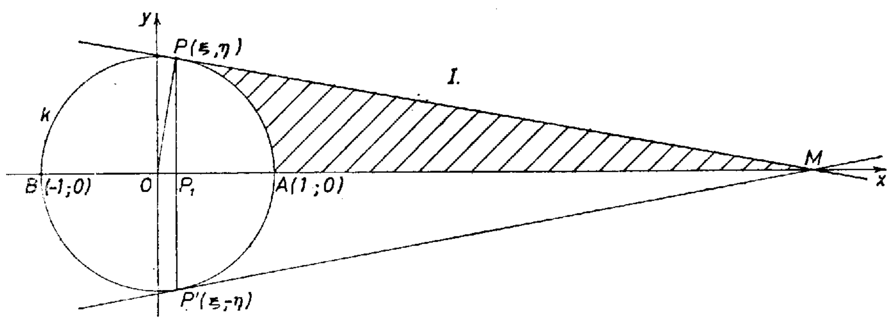
Az adott k körből és az x forgatási tengelyből álló alakzat szimmetrikus az y tengelyre, ezért a kívánt tulajdonságú $P(\xi,\eta)$ érintési pontot elég a kör jobb oldali felén keresni. Sőt elég keresni e félkör felső negyedívén levő P és alsó negyedívén levő P' megfelelő pont közös abszcisszáját, hiszen P'-t úgyis átviszi P-be az a forgatás, amely a kívánt testet előállítja. Így $0<\xi<1$ és $0<|\eta|<1$, egyenlőség sehol sem állhat a „$<$" jel helyett, mert az $A(1;\,0)$ és a $(0;\,1)$ pontok nyilvánvalóan nem felelnek meg P-ként. Az I. síknegyedben megtalált P-ből azután a két koordináta–tengelyre és az origóra való tükrözéssel kaphatjuk meg k további 3 megfelelő pontját. (Nyilvánvaló, hogy az I. negyedben csak egy megfelelő pont van, mert ξ-t 1-től csökkentve P és az érintőnek az x tengelyen levő M metszéspontja egyaránt távolodnak A-tól, a kérdéses térfogat monoton nő és átlépi az egységgömb térfogatát.)



A kérdéses F forgástestet a PM, MA szakaszokkal és az AP körívvel határolt síkidom írja le. P-nek az x-en levő vetületét P_1-gyel jelölve F-et úgy is származtathatjuk, hogy az MPP_1 derékszögű háromszög által leírt K kúpból eltávolítjuk a k által leírt G gömbnek azt a kisebbik S szeletét, melynek alapköre azonos a kúp alapkörével.

M abszcisszája az OPM derékszögű háromszögből

$$OM=\frac{OP^2}{OP_1}=\frac{1}{\xi},$$

így a kúp magassága $OM-OP_1=(1-\xi^2)/\xi$, alapkörének területe $\pi\eta^2=\pi(1-\xi^2)$. A gömbszelet térfogatának kifejezéséhez az ismert képletek[1] közül azt használjuk fel, amelyben az $m=1-\xi$ magasság mellett a gömb sugara szerepel. – A követelmény szerint K és S térfogatának különbsége egyenlő G térfogatával:

$$\frac{\pi(1-\xi^2)}{3}\cdot\frac{1-\xi^2}{\xi}-\frac{\pi}{3}(1-\xi)^2\{3-(1-\xi)\}=\frac{4\pi}{3},$$

amiből rendezéssel

$$\xi^2-6\xi+1=0.$$

Látjuk az egyenlet egymás utáni $+1$, -6, $+1$ együtthatóiból, hogy a gyökök valósak, pozitívok és egymás reciprokai.

Feladatunknak csak az a gyök adja megoldását, melyre $0<\xi<1$, tehát $\xi=3-\sqrt{8}$. (A másik gyök viszont: $\xi_2=3+\sqrt{8}$, az M helyzetét adja meg). Tehát az adott kör pontjai közül azok felelnek meg az előírásnak, amelyek abszcisszájának abszolút értéke $3-\sqrt{8}=0{,}1716$.

Hegyi Ferenc (Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimn., IV. o. t.)
Heimler László (Sopron, Széchenyi I. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Nem vezet érdemleges munkát igénylő problémára a feladat szövegének az az értelmezése, hogy a megforgatott idomot az ábra PB íve, valamint BM és MP szakaszai határolják, hiszen az így adódó test magába zárja az egységgömböt. Egyenlőség csak $P\equiv A$ esetén adódnék, ennek meglátása, kimondása viszont nem tekinthető feladatnak.

[1] Lásd pl.: *Hack F.–Kugler S.-né:* Függvénytáblázatok. Matematikai és fizikai összefüggések. Tankönyvkiadó. Budapest. 1968. 344. 2 képletek: $v=(\pi/3)\,m^2\,(3r-m)$.