

I. megoldás. Felhasználjuk, hogy a háromszög területe kifejezhető az oldalakkal és a körülírt kör r sugarával:

$$(2) \quad t = \frac{am_a}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{ab}{4} \cdot \frac{2r \sin \gamma}{r} = \frac{abc}{4r}.$$

(Az oldalak a háromszöggel együtt természetesen r -et is meghatározzák.) Felhasználjuk továbbá, hogy az x^3 függvény szigorúan monoton növekvő, mert nincs olyan intervallum, melyben a deriváltja negatív vagy 0 volna. Ezek alapján az (1) állítást így alakítjuk:

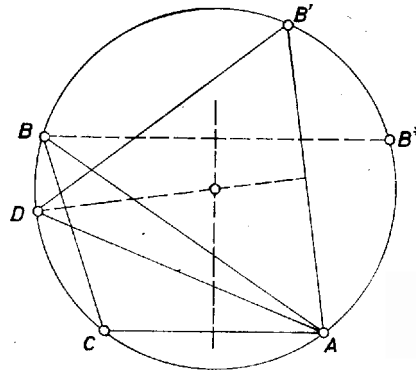
$$64t^3 = 4t \left(\frac{abc}{r} \right)^2 \leq 3\sqrt{3}a^2b^2c^2, \quad t \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3}r) \cdot \frac{3r}{2}.$$

Az utolsó alakban felismerjük, hogy a $(\sqrt{3}r)$ tényező a háromszögünk köré írt k körbe írható szabályos háromszög oldala, $3r/2$ pedig annak magassága, tehát a jobb oldal a mondott szabályos háromszög T területét jelenti. Ennélfogva azt kell bizonyítanunk, hogy

$$(3) \quad t \leq T.$$

Válasszuk úgy ABC háromszögünk szokásos betűzését, hogy legyen $a \leq b \leq c$. Ha itt mindkét összehasonlításban egyenlőség áll, akkor ABC szabályos háromszög, és (3)-ban egyenlőség áll. Az ellentétes esetben $a < c$, és a megfelelő szögekre $BAC < 60^\circ < ACB$. Belátjuk, hogy ekkor (3) az egyenlőtlenség jelével érvényes.

Jelöljük a B csúcsnak az AC oldal felező merőlegesére vonatkozó tükörképét B^* -gal és k középpontját O -val (1. ábra).



1. ábra

Ekkor

$$AOB^* < COB < 2CAB < 120^\circ, \text{ és} \\ AOB < 2ACB < 120^\circ$$

(az utóbbi esetben $AOB < k$ -nak a C -t nem tartalmazó AB ívéhez tartozó középponti szögét jelöli). Ha tehát az OA sugarat az ABC háromszög körüljárásával megegyező irányban O körül 120° -kal elforgatjuk, közben átlépjük az OB^* sugarat, de nem érjük el az OB sugarat. Jelöljük a 120° -os forgatás után a sugár új végpontját B' -vel, ekkor előbbi megállapításunk szerint B' a C -t nem tartalmazó B^*B íven van, tehát távolabb van az AC egyenestől, mint B . Eszerint az $AB'C$ háromszög t_1 területe nagyobb t -nél.

A k kör AB' -től legtávolabbi pontja az AB' -re merőleges átmérőnek AB' -től távolabbi D végpontja, tehát t_1 nem lehet nagyobb az $AB'D$ háromszög területénél. Mivel pedig az AB' ívhez tartozó középponti szög 120° -os, azért az $AB'D$ háromszög szabályos, és a területe T . Ezzel beláttuk, hogy $T \geq t_1 > t$, ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés. A fenti bizonyítás nem különbözik lényegesen attól, ami a (3) híres-nevezetes állításra pl. a következő helyen olvasható: *H. Rademacher-O. Toeplitz: Számokról és alakzatokról. 2. kiadás. Középiskolai Szakköri Füzetek. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954. 14–16. oldal.*

II. megoldás. Az állítást ismét átalakítjuk. (2) alapján a fentiekhez hasonlóan

$$\frac{abc}{r} \leq \sqrt{3\sqrt{a^2b^2c^2}}, \quad \text{azaz} \quad \sqrt[3]{abc} \leq \sqrt{3}r.$$

Ehhez elég belátni, hogy (poz. számok számtani és mértani közepe):

$$(4) \quad \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{3}r,$$

vagyis azt, hogy az r sugarú körbe írt háromszög kerülete legfölbjebb $3\sqrt{3}r$, ami a fentiek szerint a beírt szabályos háromszög kerülete.

Ezt ugyanúgy láthatjuk be, mint az I. megoldásban (3)-at. Az ott használt jelölések mellett elég azt belátnunk, hogy

$$AB' + B'C > AB + BC,$$

azaz hogy

$$2r \sin 60^\circ + 2r \sin(\alpha + \gamma - 60^\circ) > 2r \sin \alpha + 2r \sin \gamma.$$

Ez a $\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$ azonosság szerint ekvivalens a következőkkel:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma - 120^\circ}{2} &> \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\gamma - \alpha}{2}, \\ \frac{\alpha + \gamma}{2} - 60^\circ &< \frac{\gamma - \alpha}{2}. \end{aligned}$$

Ez pedig valóban igaz, mert jobb oldala így alakítható:

$$\frac{\gamma - \alpha}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2} - \alpha,$$

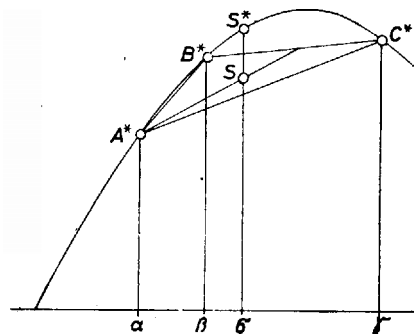
és $\alpha < 60^\circ$. Hasonlóan láthatjuk be, hogy az $AB'D$ háromszög kerülete legalább akkora, mint az $AB'C$ kerülete.

Megjegyzések. 1. A (4) állítás ekvivalens a háromszögünk szögeire vonatkozó

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

egyenlőtlenséggel. Erre adunk szemléletes értelmezést: $\sin \alpha, \sin \beta$ és $\sin \gamma$ a $\sin x$ függvényt ábrázoló görbe α, β , ill. γ abszcisszájú A^*, B^*, C^* pontjának ordinátája. Az abszcisszák pozitívak és összegük π . Így (4) bal oldala az $A^*B^*C^*$ háromszög S súlypontjának ordinátája, S abszcisszája hasonlóan $\sigma = \pi/3$, és a görbe σ abszcisszájú S^* pontjának ordinátája $\sqrt{3}/2$, a (4) jobb oldalán álló szám. Eszerint (4) más szóval azt állítja, hogy S alatta van a $\sin x$ függvényt ábrázoló görbének, vagy éppen rajta van. (Ha α, β, γ közül kettő vagy mind a három egyenlő, akkor a mondott háromszög elfajul, ekkor szemléletesebb az A^*, B^*, C^* tömegpontrendszer súlypontjára gondolni, mindhárom pontba egyenlő tömeget téve; $A^* \equiv B^*$ esetén S az A^*C^* szakaszon van.)

Ha $\alpha < \beta < \gamma$, akkor S benne van az $A^*B^*C^*$ háromszögben, ezért elég azt belátni, hogy a görbe $(0, \pi)$ intervallumbeli ívének két pontját összekötő húr a görbe alatt halad (2. ábra, jobb áttekintés érdekében torzítással), a szokásos kifejezéssel: a $\sin x$ görbe – és a függvény is – ebben az intervallumban konkáv (ti. alulról, a pozitív y tengely irányába nézve).¹



2. ábra

Ezt bizonyítjuk a $0 < \alpha < \beta < \gamma$ nagyságviszony esetében az A^*C^* húrra.

Állításunk azt jelenti, hogy a közbülső B^* pontra az A^*B^* egyenes emelkedése nagyobb, mint a B^*C^* egyenesé:

$$(5) \quad \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\alpha - \beta} > \frac{\sin \gamma - \sin \beta}{\gamma - \beta}.$$

Ennek bizonyítására megmutatjuk, hogy

$$(6) \quad \frac{\sin x - \sin \beta}{x - \beta} \begin{cases} < \cos \beta, & \text{ha } \pi > x > \beta & \text{(I.)} \\ > \cos \beta, & \text{ha } 0 < x < \beta & \text{(II.)} \end{cases}$$

¹ Vö. a függvény konkávságának pusztán számviszonyokkal kifejezett definíciójával a P. 110. problémában. K. M. L. 43 (1971) 30. oldal.

ebből $\alpha < \beta < \gamma$ figyelembevételével már adódik, hogy $\cos \beta$ értéke (5) bal oldalánál kisebb, jobb oldalánál nagyobb, tehát (5) igaz.

Deriváljuk a következő függvényt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x - \sin \beta - (x - \beta) \cos \beta. \\ f'(x) &= \cos x - \cos \beta. \end{aligned}$$

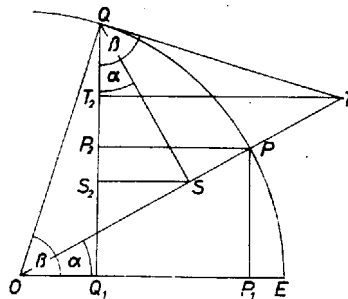
Eszerint az (I.) intervallumban minden pontjában $f'(x) < 0$, a (II.) pontjaiban $f'(x) > 0$, és mivel $f(\beta) = 0$, azért (I.) és (II.) mindegyikében $f(x) < 0$. Ebből átrendezéssel és az osztásban $x - \beta$ előjelét figyelembe véve adódik (6).

Mivel $\cos \beta$ a $\sin x$ görbe B^* -beli érintőjének iránytangense, azért az (5)-re adott bizonyításunk azt jelenti, hogy az érintő mind $x > \beta$, mind $x < \beta$ esetén közte halad a B^*C^* és A^*B^* egyeneseknek.

2. Goniometriai bizonyítását adjuk a (6) pótlására alkalmas

$$\cos \alpha > \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\beta - \alpha} > \cos \beta \quad \left(0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

egyenlőtlenségnek. Mérjük föl az O középpontú, egységsugarú kör OE sugarától pozitív irányban az $EOP = \alpha$ és $EOQ = \beta$ szögeket (3. ábra), húzzuk meg a kör Q -beli érintőjét az OP -vel való T metszéspontjáig, bocsássunk merőlegest P -ből és Q -ból OE -re – talppontjuk P_1 , ill. Q_1 –, továbbá Q -ból OP -re talppontja S –, végül S -ből, P -ből és T -ből QQ_1 -re – a talppontok rendre S_2, P_2, T_2 .



3. ábra

Így $\angle Q_1QS = \alpha$, $\angle Q_1QT = \beta$, a pozitív hegyesszögekre ismert $\sin x < x < \tan x$ egyenlőtlenséget a $\angle QOP = \beta - \alpha$ szögre alkalmazva

$$QS < \widehat{QP} < QT,$$

továbbá $OS < OP < OT$, ennélfogva $Q_1S_2 < Q_1P_2 < Q_1T_2$, tehát

$$QT_2 < QP_2 < QS_2.$$

Ezek fölhasználásával

$$\cos \beta = \frac{QT_2}{QT} < \frac{QP_2}{QT} < \frac{QP_2}{QP} = \frac{QQ_1 - PP_1}{\beta - \alpha} = \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\beta - \alpha} < \frac{QS_2}{QP} = \frac{QS_2}{QS} < \cos \alpha$$

és a hullámosan aláhúzott tagok éppen a fenti állításunkat adják.

Könnyű belátni, hogy bizonyításunk mindaddig érvényes, amíg $\alpha < \beta < \alpha + 90^\circ$, eszerint fenti állításunkat (α, β helyére rendre β -t, γ -t írva) csak olyan háromszögekre bizonyítja, amelyekre $\gamma - \beta < 90^\circ$. Másrészt elég a konvexitást a $(0, \pi/2)$ intervallumra bizonyítani, hiszen $\sin x$ képe a $(\pi/2, \pi)$ intervallumban amannak a tükröképe az $x = \pi/2$ egyenesre.