

A kettős egyenlőtlenség közepén álló Q_n hányados írható n számú, $\frac{2k-1}{2k}$ alakú hányados szorzataként, ahol $k = 1, 2, \dots, n$.

1. Írjunk Q_n k -edik tényezője helyére $\frac{2k-2}{2k-1}$ -et, ha $k = 2, 3, \dots, n$ – vagyis csökkentsük 1-gyel a számlálót is, nevezőket is – az első tényezőt pedig hagyjuk változatlanul. Ezáltal $n > 1$ esetére Q_n -nél kisebb számot képezünk, mert egyrészt minden egyes új tényező kisebb annál, aminek a helyére írtuk:

$$\frac{2k-2}{2k-1} - \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{(2k-1)2k} < 0 \quad (k \geq 2),$$

másrészt még az új hányadosok is pozitívok, így szorzatuk is pozitív. Eszerint

$$Q_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \right).$$

Vegyük észre, hogy így a zárójelben $1/Q_n$ -nek $1/2n$ része áll, azt kaptuk tehát, hogy

$$Q_n > \frac{1}{4n} \cdot \frac{1}{Q_n}, \quad \text{azaz} \quad Q_n > \frac{1}{\sqrt{4n}}, \quad \text{ha} \quad n > 1$$

és itt a jobb oldal éppen az (1)-beli alsó korlát egyszerűbb alakja. A még nem tekintett $n = 1$ esetben pedig Q_n és a bizonyítandó alsó korlát között egyenlőség áll fenn. Ezzel (1) első egyenlőtlenségét bebizonyítottuk.

2. Írjunk másrészt Q_n fenti szorzattá alakításában minden egyes tényező helyére nála nagyobbat, kivéve ismét az első tényezőt. Éspedig

$$\frac{2k-1}{2k} \text{ helyére } \frac{2k}{2k+1} \text{-et (valóban, } \frac{2k}{2k+1} - \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2k(2k+1)} > 0),$$

ha $k = 2, 3, \dots, n-1$, ha pedig $k = n$, akkor $\frac{2n}{2n}$ -t (vagyis $a = 2$ esetén csak az utóbbi típusú növelést végezzük). Ezek után a fentihez hasonló felismeréssel

$$Q_n < \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{Q_n} \cdot \frac{1}{2n} \right)$$

(a zárójelbeli kifejezést megszoroztuk $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}$ -dal). Innen, ismét átszorzással és gyökvonással

$$Q_n < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}, \quad \text{ha} \quad n > 1,$$

ami az (1) második egyenlőtlensége. $n = 1$ esetére pedig az állítás így adódik: $1/2 = \sqrt{2/8} < \sqrt{3/8}$. Ezzel a kívánt bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. Bizonyítható az állítás a teljes indukció módszerével is, ha előzőleg a felső korlátban $2n$ helyére $2n+1$ -et írunk, ami által az egyenlőtlenség-pár második fele valamivel erősebb állítást mond ki.

2. Emeljük négyzetre az (1) állítás tagjait, és szorozzuk őket $2n$ -nel, így ezt kell bizonyítanunk:

$$(2) \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2 \cdot 2n} < \frac{3}{4}.$$

A középen álló

$$A_n = 2nQ_n^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)^2}{(2n-2) \cdot 2n}$$

mint egy számsorozat n -edik tagja n -ben monoton nő, hiszen

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{(2n+1)^2}{2n(2n+2)} > 1,$$

és a (2) bal oldala e sorozat első tagja: $A_1 = 1/2$. A jobb oldalon álló $3/4$ szám viszont a monoton fogyó

$$B_n = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}$$

sorozat első tagja, és ennek a sorozatnak minden tagja nagyobb az A_n sorozat tagjainál. Könnyen igazolható ez az egyenlő indexű tagokra:

$$(3) \quad \frac{B_n}{A_n} = \frac{2n+1}{2n} > 1.$$

Szokás az

$$(4) \quad A_n < A_{n+1} < B_{n+1} < B_n$$

egyenlőtlenség alapján azt mondani, hogy az (A_n, B_n) intervallumok „egymásba skatulyázva”. Be lehet bizonyítani, hogy ha az A_n, B_n (végtelen) sorozatokra teljesül (4), akkor e sorozatok konvergensek, és ha még

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (B_n - A_n) = 0, \quad \text{vagy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{A_n} = 1$$

is teljesül, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n.$$

Esetünkben ez a közös határérték $\frac{2}{\pi} = 0,63661\dots$, amit az (A_n, B_n) számpárok egyre jobban megközelítenek:

$$A_1 = \frac{1}{2} = 0,5; \quad A_2 = \frac{9}{16} = 0,56\dots; \quad A_3 = \frac{225}{384} = 0,585\dots; \dots$$

$$B_1 = \frac{3}{4} = 0,75; \quad B_2 = \frac{45}{64} = 0,71\dots; \quad B_3 = \frac{1575}{2304} = 0,683\dots; \dots$$

és

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{3}{2}, \quad \frac{A_2}{B_1} = \frac{3}{4}, \quad \frac{B_2}{A_2} = \frac{5}{4}, \quad \frac{A_3}{B_2} = \frac{5}{6}, \quad \frac{B_3}{A_3} = \frac{7}{6}, \dots$$

E sorozatok (vagy a reciprokaik) alapján π értéke tetszőleges pontossággal meghatározható. Erre a célra *J. Wallis* használta először ezeket a sorozatokat 1656-ban.