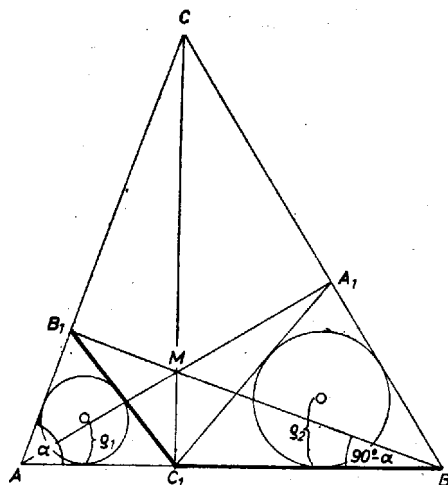


Jelöljük a keresett háromszög szögeit α -val, β -val, γ -val, az adott sugarakat ϱ_1 -gyel és ϱ_2 -vel.

I. Tegyük fel először, hogy a keresett háromszög hegyesszögű ($\alpha < 90^\circ$). A B_1 , C_1 csúcsok rajta vannak a BC szakasz feletti Thalész-körön, ezért a B_1C szakasz a C_1 pontból akkora szög alatt látszik, mint B -ből, tehát a látószög $(90^\circ - \gamma)$ (1a. ábra).

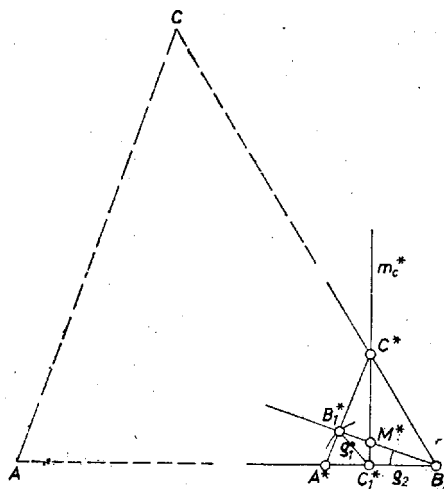


1a. ábra

Így az AB_1C_1 háromszögnek C_1 -nél levő szöge egyenlő γ -val, amiből már következik, hogy $AB_1C_1 \triangleleft = \beta$. Ugyanígy kapjuk, hogy a BA_1C_1 háromszögben A_1 -nél α , C_1 -nél pedig γ nagyságú szög van. Emiatt az AB_1C_1 , és A_1BC_1 háromszögek hasonlóak (csúcsaik a felsorolás sorrendjében felelnek meg egymásnak), és így megfelelő oldalaik aránya megegyezik a beírható köreik sugarával, például

$$(1) \quad B_1C_1 : BC_1 = \varrho_1 : \varrho_2.$$

Ennek alapján a BC_1B_1 háromszöghöz hasonló $BC_1^*B_1^*$ háromszöget szerkesztünk: ϱ_2 hosszúságú BC_1^* szakasz B végpontjához felmérjük a $(90^\circ - \alpha)$ szöget, és ennek a szárát elmetsszük a C_1^* középpontú, ϱ_1 sugarú körrel (1b. ábra).



1b. ábra

Mivel a keresett $BC_1^*B_1^*$ háromszögben C_1^* -nél tompaszög van, megfelelő háromszöget csak akkor kapunk, ha

$$(2) \quad \varrho_1 > \varrho_2 \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) = \varrho_2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Ha a (2) feltétel teljesül, a ϱ_1 sugarú, C_1^* középpontú körön keletkező metszéspontok között van olyan, amelyik a BC_1^* egyenesre C_1^* -ben emelt m_c^* merőleges B -t nem tartalmazó oldalán van, legyen ez B_1^* . Jelöljük BB_1^* és m_c^* metszéspontját M^* -gal, és messe a BB_1^* egyenesre B_1^* -ban emelt merőleges a BC_1^* egyenest A^* -ban, az A^*M^* egyenesre B -ből bocsátott merőleges pedig az $A^*B_1^*$ egyenest C^* -ban. Szerkesztésünk szerint a kapott A^*BC^* háromszög hasonló a keresett ABC háromszöghöz, tehát belőle alkalmas nagyítással megkapjuk az ABC háromszöget.

II. A tompaszögű háromszögek vizsgálatát kezdjük a $\gamma > 90^\circ$ esettel, így tehát az adott α szög továbbra is hegyesszög. Ekkor a B_1C szakasz a B , C_1 csúcsokból $(\gamma - 90^\circ)$ -os szög alatt látszik (2. ábra), és az AB_1C_1 háromszögben C_1 -nél ismét γ nagyságú szög van; az AB_1C_1 , A_1BC_1 háromszögek most is hasonlóak, és fennáll (1).

nem határozza meg egyértelműen a háromszöget. Könnyen látható, hogy valóban végtelen sok, a feltételeknek eleget tevő háromszög szerkeszthető.

Összefoglalva eredményeinket, a szerkeszthetőség feltétele rendre a következő:

– ha $\alpha < 90^\circ$, akkor $\varrho_1 > \varrho_2 \cos \alpha \geq 0$,

ha ez teljesül, a $\varrho_1 \leq \varrho_2$ és a $\varrho_2 = 0$ esetben egy, a $\varrho_1 > \varrho_2 > 0$ esetben két megoldást kapunk;

– ha $\alpha = 90^\circ$, akkor a feltétel

$$\varrho_2 > \varrho_1 = 0,$$

és ha ez teljesül, végtelen sok megoldás van;

– ha $\alpha > 90^\circ$, akkor

$$\varrho_2 > \varrho_1 > \varrho_2 |\cos \alpha| > 0,$$

ha ez teljesül, egy megoldás van. – A megoldást befejeztük.