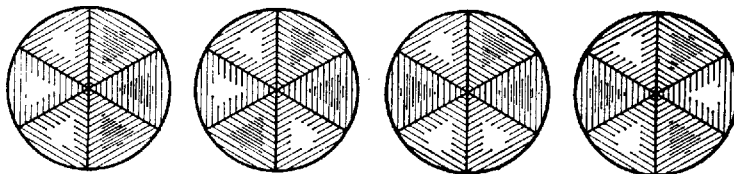


I. megoldás. a) Ha a dobozba csak egyféle sajtot teszünk, az elhelyezés egyértelmű, és a sajt fajtájának a megválasztására 3 lehetőségünk van. Így 3 elrendezést kapunk.

b) Kétféle sajtot téve a dobozba, figyelembe vesszük, hogy az egyes fajtákból hány cikket használunk fel. A cikkek számát háromféleképpen választhatjuk meg: egyikből 5 cikket veszünk, a másiktól 1-et; vagy 4-et és 2-t, vagy pedig mindkét fajtából hármat. Ha egy fajtából 5 cikket teszünk a dobozba, és egy másiktól 1-et, az elhelyezés egyértelmű; az első fajtáját 3-féleképpen választhatjuk meg, a másodiktét 2-féleképpen. Az elhelyezések száma ezek szerint $3 \cdot 2 = 6$.

Akkor is 6-féleképpen választhatjuk meg a kétféle sajt fajtáit, ha egyikből 4-et, egy másiktól 2-t használunk fel, ekkor azonban már nem egyértelmű az elhelyezés: a két azonos fajtájú sajt cikk vagy szomszédos, vagy másodszomszédjai egymásnak, vagy egymással szemben vannak. Az ilyen választások és elhelyezések száma tehát $6 \cdot 3 = 18$.

Ha két fajtából három-három cikket veszünk, akkor az elhelyezésre négy lehetőségünk van (1. ábra).



1. ábra

A felhasznált két fajtát pedig most csak 3-féleképpen választhatjuk meg (ennyiféleképpen lehet azt megadni, hogy melyiket *nem* használjuk fel a három fajta közül), eszerint az ilyen elhelyezések száma $4 \cdot 3 = 12$.

c) Ha mindhárom fajtából teszünk a dobozba, az egyes fajtákból rendre $4 + 1 + 1$, vagy $3 + 2 + 1$, vagy $2 + 2 + 2$ cikket választhatunk. A $(4 + 1 + 1)$ esetben ismét a csak egy-egy cikkel képviselt fajtát célszerű elhelyezni, majd a dobozt a 4 egyforma sajttal feltölteni. Az 1-1 db cikk – mint fent – lehet szomszédos, másod-szomszéd és szemközti. Az első két esetben 3-féleképpen választhatjuk meg e párból annak a fajtáját, amelyik az óramutató járása szerint előbb áll, és 2-féleképpen a másiknak a fajtáját. Ha viszont e pár tagjai szemközti, az elhelyezést egyértelműen meghatározza, hogy melyik fajtából használunk 4 cikket. Az elhelyezések száma itt $2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 = 15$.

A $(3 + 2 + 1)$ esetben 3-féleképpen választhatjuk azt a fajtát, amelyből csak egy cikket használunk, és ezután 2-féleképpen azt, amelyikből kettőt. Helyezzük el először az 1 cikkel képviselt fajtát, ez után a többi öt hely közül az azonos fajtájú két cikk helyét $\binom{5}{2} = 10$ -féleképpen választhatjuk meg. Így $10 \cdot 6 = 60$ elhelyezést kapunk.

Végül a $(2 + 2 + 2)$ esetben az azonos fajtájú cikkpárok vagy mind szomszédosak, vagy csak két pár, vagy csak egy marad szomszédos közülük, vagy egy sem. Az elhelyezések száma az előzők mintájára rendre 2, 3, $3 \cdot 2 = 6$, az utolsó elv mellett pedig 5 ($CHCMHMH$, $CMCHMH$, $CHMCHMH$, $CHMCMH$ és $CMHCHMH$), így ebben az esetben együttvéve 16 elhelyezést kapunk.

Eredményeinket összegezve, a lehetőségek száma: $3 + (6 + 18 + 12) + (15 + 60 + 16) = 130$.

Turán György (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás (vázlat). Osztályozzuk az elhelyezéseket aszerint, hogy bennük a cikkeken körbehaladva hány olyan szomszédpárt találunk, amelynek a tagjai különböző fajtájúak. Más szóval a dobozkitöltések feldarabolását tekintjük olyan *blokkokra*, amelyek egymáshoz csatlakozó ugyanolyan fajtájú sajtcikkekből állnak.

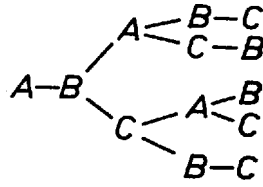
1. Ha ilyen pár nincs, akkor a cikkek egyformák, tehát 3 elhelyezés van.

2. Csak egy ilyen blokkválasztó vonal nyilván nem lehet, a következő eset tehát az, amikor két helyen csatlakozik egymáshoz két különböző fajtájú sajt cikk. Ekkor tehát kétféle sajtot használunk, ezekből rendre $5 + 1$, $4 + 2$, $3 + 3$ cikket vehetünk, és a lehetőségek száma a fajták választását is figyelembe véve rendre $3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 = 15$.

3. Ha az elhelyezésben három blokk van, az egyes blokkokra rendre $(4 + 1 + 1)$, $(3 + 2 + 1)$ vagy $(2 + 2 + 2)$ cikket tehetünk, és a fajták választása szerint rendre $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 = 20$ a lehetőségek száma.

4. Ha négy blokk van, akkor bennük a cikkek száma vagy $(3 + 1 + 1 + 1)$, vagy $(2 + 2 + 1 + 1)$. A lehetőségek száma az első esetben $2 \cdot 3 \cdot 3$, és ugyanennyi a második esetben is, feltéve, hogy a két kettes blokk szomszédos; ha viszont ezek szemközti, és különböző fajtájúak, a lehetőségek száma 3. Ha szemközti és azonos fajtájúak, a lehetőségek száma $3 \cdot 3$. Így összesen $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 + 3 \cdot 3 = 48$ elhelyezést adhatunk meg.

5. Öt blokk esetén csak $(2 + 1 + 1 + 1 + 1)$ lehet a számuk. Helyezzük el először a két szomszédos egyforma cikket (fajtáját 3-féleképpen választhatjuk meg, ezt a továbbiakban *A*-val jelöljük). Az óramutató járása szerint haladva tovább, utánuk egy tőlük különböző fajtájú cikket kell választanunk (két lehetőség, a választott fajtát *B*-vel jelöljük), az esetek kifejtését a 2. ábra mutatja, itt $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ elhelyezés van.



2. ábra

6. Végül, ha minden szomszédpárt különböző fajtájú sajtok alkotnak, 4 lényegesen különböző elrendezés van:

- I. A B A B A B, III. A B C A B C,
II. A B A B A C, IV. A B C A C B,

és a betűk helyére fajtákat írni $3 + 3 \cdot 2 + 2 + 3 = 14$ -féleképpen lehet.

Mindezek szerint összesen $3 + 15 + 20 + 48 + 30 + 14 = 130$ lehetőség van.

Megjegyzés. Az alábbi táblázat megkönnyíti az I. és II. megoldásban különböző szempontok szerint számba vett elrendezések azonosítását.

I \ II	1	2	3	4	5	6	Össz.
6	3	—	—	—	—	—	3
5 + 1	—	6	—	—	—	—	6
4 + 2	—	3	—	12	—	—	18
3 + 3	—	3	—	6	—	3	12
4 + 1 + 1	—	—	6	9	—	—	15
3 + 2 + 1	—	—	12	18	24	6	60
2 + 2 + 2	—	—	2	3	6	5	16
Össz.	3	15	20	48	30	14	130

III. megoldás. Könnyű lenne megadni a választ, ha rögzítenénk azt a dobozt, amelyikbe visszarakunk 6 cikket, és benne az I., II., ..., VI. helyet is kijelölnénk. Így ugyanis mind a 6 helyre 3–3-féleképpen választhatjuk egymástól függetlenül a C-, H-, M-sajttípus egy-egy cikkét, tehát $3^6 = 729$ -féle elhelyezést kapunk. Az így kapott elhelyezések azonban feladatunk szempontjából nem mind különbözők. Például az $MCMHCH$ elrendezésből alkalmas forgatásokkal a nem azonosnak tekintett

$$CMHCHM, MHCHMC, HCHMCM, CHMCMH, HMCMHC$$

elhelyezéseket kapjuk. Általában egy elhelyezésből – a dobozt körbeforgatva – öt további, a fenti leszámlálásban ugyancsak figyelembe vett elhelyezést kapunk. Nem szabad azonban ennek alapján arra gondolnunk, hogy a feladat megoldását úgy kapjuk meg, hogy az előbbi 729-et osztjuk 6-tal. (Erre utal már csak az a körülmény is, hogy 729 nem is osztható 6-tal.) Némely elhelyezésből ugyanis így 5-nél kevesebb új elhelyezési tervet kapunk, sőt esetleg egyet sem. Ilyen például $MCMCMC$, amelyből csak az első két lépésben kapunk tőle formálisan különböző tervet: $CMCMCM$, $MMCMCM$, és az eredeti tervet már a harmadik lépésben visszkapjuk.

Az ilyen elrendezéseket külön fel kell sorolnunk előbb, hogy a visszamaradók számát 6-tal oszthassuk. Azokat az elrendezéseket keressük tehát első lépésben, amelyeket már egy 360° -nál kisebb forgatás önmagába visz át, más szóval amelyeknek valamilyen ciklikus szimmetriájuk van.

A ciklus tagjainak száma nyilvánvalóan csak 6 vagy ennek osztója lehet, vagyis 3, 2 vagy 1. A rövidebb ciklusokban csak 3, 2, ill. 1 tagot választhatunk szabadon, sőt itt is figyelembe veendő, hogy amint némely ciklus nem igazi 6-tagú, ugyanúgy az 1-tagú ciklus kiadódik a 2-tagúak között is, a 3-tagúak között, és a 6-tagúak között is.

Mármint az egytagú ciklus 3-féleképpen választható. A kéttagúakat keresve a gondolható 3^2 -ből el kell hagyni azt a 3-at, amelyeknek a tagjai egyenlők: CC , HH és MM , vagyis a valódi kéttagúak száma, rögzített doboz esetén $3^2 - 3$, és ezek forgatással $(3^2 - 3)/2 = 3$ különböző berakást jelentenek. Hasonlóan a valódi háromtagúak száma, rögzítéssel $3^3 - 3 = 24$, forgatással ennek 3-adrésze: 8.

Ezek szerint, a rögzítést tekintetbe véve, $3^6 - 3 - (3^2 - 3) - (3^3 - 3) = 696$ olyan berakásmód marad, amely valóban hattagú ciklusba tartozik bele, tehát a keresett szám:

$$3 + \frac{3^2 - 3}{2} + \frac{3^3 - 3}{3} + \frac{3^6 - 3 - (3^2 - 3) - (3^3 - 3)}{6} = 130.$$

Megjegyzés. Eredményünk így is értelmezhető: ha dominójátékot készítünk szabályos hatszög alakú kövekből úgy, hogy a köveket 6 egybevágó szabályos háromszögre osztjuk, és ezekbe minden lehető módon 2, 1 vagy 0 pontot írunk, akkor a kőkészlet 130 darabból fog állni.