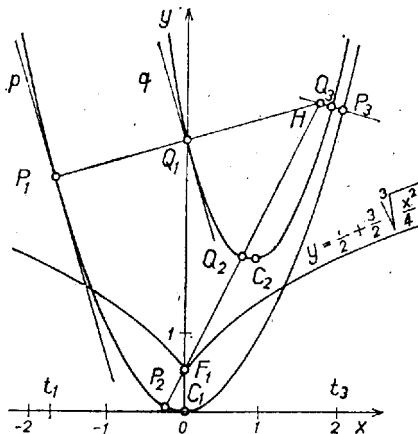


I. megoldás. Tegyük fel, hogy a feladat kérdésére a válasz igenlő, a p parabola t abszcisszájú $P(t, t^2)$ pontja és a q parabola $Q(u, 2u^2 - 7u/2 + 57/16)$ pontja teljesíti a követelményt. Ekkor p -nek P -beli és q -nak Q -beli érintője párhuzamos egymással.



Mivel e két görbe esetében az ordináta az abszcisszájának differenciálható függvénye, azért az érintő irántangensét megadja a deriváltnak az illető helyen fölvevett értéke, p és P esetében $2t$, q és Q esetében $4u - 7/2$, és e kettő egyenlő egymással:

$$(1) \quad 2t = 4u - 7/2, \quad t = 2u - 7/4.$$

Másrészt a PQ egyenes merőleges mindkét érintőre – más szóval PQ a két parabola közös normálisa – eszerint q -nak Q -beli normálisa átmegy a P ponton. E normális iránytényezője $-1/(4u - 7/2)$, hacsak a nevező 0-tól különböző – azaz $u \neq 7/8$ – tehát egyenlete

$$(2) \quad y - \left(2u^2 - \frac{7}{2}u + \frac{57}{16}\right) = \frac{-1}{4u - 7/2} (x - u),$$

és ezt P koordinátái kielégítik. Ezeket (1) alapján mindjárt u -val kifejezve, u -ra kapunk egyenletet:

$$\left(2u - \frac{7}{4}\right)^2 - 2u^2 + \frac{7}{2}u - \frac{57}{16} = \frac{-1}{4u - 7/2} (u - 7/4),$$

$$(3) \quad 8u^3 - 21u^2 + \frac{45}{4}u = 8u \left(u^2 - \frac{21}{8}u + \frac{45}{32}\right) = 8u \left(u - \frac{15}{8}\right) \left(u - \frac{3}{4}\right) = 0.$$

Eszerint u , majd (1) alapján t megfelelő értékei, végül a követelményt kielégítő P , Q pontpárok a következők (oszlopokba rendezve):

$u_1 = 0$	$u_2 = \frac{3}{4}$	$u_3 = \frac{15}{8}$
$t_1 = -\frac{7}{4}$	$t_2 = -\frac{1}{4}$	$t_3 = 2$
$P_1 \left(-\frac{7}{4}; \frac{49}{4}\right)$	$P_2 \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{16}\right)$	$P_3(2; 4)$
$Q_1 \left(0; \frac{57}{16}\right)$	$Q_2 \left(\frac{3}{4}; \frac{33}{16}\right)$	$Q_3 \left(\frac{15}{8}; \frac{129}{32}\right)$

Megjegyzés. P_i , Q_i ($i = 1, 2, 3$) pontpárok pontos megadása azon múltott, hogy a (3) harmadfokú egyenletnek $u = 0$ gyökét felismertük. Ha t helyett u -t küszöböltük volna ki, akkor nem állt volna elő ez a szerencsés helyzet. Hasznos tehát néha az efféle próbálkozás.

II. megoldás (vázlat). Bármely két parabola, v_1 és v_2 , hasonló egymáshoz (alakra nézve), hiszen egyetlen lineáris adatuk, a p_1 , ill. p_2 paraméterük meghatározza őket, v_1 -et $\lambda = p_2/p_1$ arányban nagyítva és kellően elmozdítva v_2 -t kapjuk. A transzformációban az F_1 , ill. F_2 fókuszok és a C_1 , ill. C_2 csúcsok természetesen egymásnak felelnek meg páronként. Továbbá v_1 -ből egy tetszőleges A_1 pontnak v_2 -beli megfelelőjét, A_2 az a félegyenes metszi ki, amely F_2 -ből indul és amelyre a $C_2F_2A_2$ szög nagyság és forgási irány szempontjából egyenlő a $C_1F_1A_1$ szöggel.

Amennyiben még a két parabola tengelyei párhuzamosak (és síkjuk közös), az A_2 -beli érintő párhuzamos az A_1 -beli érintővel, ekkor v_1 és v_2 centrális hasonlósági helyzetben vannak egymáshoz képest – hacsak $C_1F_1F_2C_2$ nem paralelogramma –, a hasonlóság centruma az F_1F_2 , C_1C_2 egyenespár H metszéspontja. (A kiemelt esetben pedig translációval vihető át egymásba v_1 és v_2).

Esetünkben fordítva, olyan P , Q pontpárt keresünk a párhuzamos tengelyű p , q parabolapáron, amelyekben az érintők párhuzamosak. Ezért P , Q a hasonlóságban megfelelő pontpár, ugyanis a parabolához bármely iránnyal párhuzamosan egy és csakis egy érintő illeszthető. Így a PQ egyenes átmegy H -n. Ezek alapján tervünk a következő: kiszámítjuk H koordinátáit, felírjuk q -nak u abszcisszájú Q pontjában az érintőre merőleges n egyenes – a fenti normális – egyenletét, ekkor u -ra abból kapunk egyenletet, hogy H koordinátái kielégítik n egyenletét.

Mármost az adott p parabola C_1 csúcsa az origó, paramétere $p_1 = 1/2$. Hasonlóan q egyenletét kellően alakítva:

$$\left(x - \frac{7}{8}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(y - \frac{65}{32}\right),$$

tehát csúcsa: $C_2 \left(\frac{7}{8}, \frac{65}{32}\right)$, paramétere: $p_2 = \frac{1}{4}$. Így a q parabola $p_2/p_1 = 1/2$ arányú kicsinyítéssel áll elő p -ből, C_2

felezi a C_1H szakaszt, más szóval H a C_1 -nek C_2 -re vonatkozó tükröképe: $H \left(\frac{7}{4}, \frac{65}{16}\right)$ Ezt a fenti (2)-be helyettesítve és rendezve

$$\left(\frac{65}{16} - 2u^2 + \frac{7}{2}u - \frac{57}{16}\right) \left(4u - \frac{7}{2}\right) + \left(\frac{7}{4} - u\right) = 0, \quad 8u^3 - 21u^2 - \frac{45}{16}u = 0,$$

mint az I. megoldásban.

Megjegyzések. 1. A fenti (2) mintájára az $y = x^2$ normálpárabola (u, u^2) pontjában a normális egyenlete $x + 2uy - (2u^3 + u) = 0$, ill. u szerint rendezve $2u^3 - (2y - 1)u - x = 0$ (ez az alak már $u = 0$ esetén is érvényes). Ennek harmadfokú volta azt jelenti, hogy tetszés szerint választva egy $P(x, y)$ pontot, ehhez három olyan (u, u^2) pontja tartozik a normálpárabolának, amelynek normálisa átmegy P -n. Ezt így szokás mondani: bármely parabola összes normálisait véve, ezek *harmadosztályú görbesereget* alkotnak, a sík bármely pontján három megy át a sereg egyenesei közül. Hozzá kell azonban tennünk ehhez, hogy szemléletesen csak akkor igaz ez, ha a harmadfokú egyenlet u -ra három egymástól különböző, *valós* gyököt szolgáltat. Felírva a gyököket az iskolai függvénytáblázat¹ 251. 31 – 32 képletei szerint, akkor és csak akkor, kapunk ilyen három gyököt, ha

$$\left(-\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{2y-1}{3}\right)^3 < 0, \quad \text{azaz} \quad y > \frac{1}{2} \left(1 + 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}\right),$$

más szóval, ha P „fölköte” van az $y = (1 + 3\sqrt{x^2/4})/2$ egyenletű vonalnak (lásd az ábrát). – Esetünkben q hasonló görbét is figyelembe kell venni.

2. A fentiek szerint $P_i (i = 1, 2, 3)$ a p -nek és Q_i a q -nak olyan ponthármasa, amelyekben megrajzolt normálisok egy pontban (H -ban) metszik egymást. Éppen ennek feltételét állapítottuk meg az 1770. feladatban;² a $P_1P_2P_3$ háromszög súlypontjának p tengelyén, az $x = 0$ egyenesen kell lennie, a $Q_1Q_2Q_3$ háromszög súlypontjának pedig q tengelyén, az $x = \frac{7}{8}$ egyenesen. Valóban, $(t_1 + t_2 + t_3) = 0$ és $(u_1 + u_2 + u_3)/3 = 7/8$.

3. Az ábra szemlélete azt sejteti, hogy ha p -t és q -t egy térképen egy folyó két partjának tekintjük, akkor a folyó a P_3Q_3 normálisszakasz mentén a legszűkebb, hasonlóan a P_1Q_1 szakasz egy bizonyos környezetében szintén mindenütt szélesebb a P_1Q_1 szakasznál, végül P_2Q_2 -nek egy környezetében a P_2Q_2 szakasz a legnagyobb szélesség. – A kérdés vizsgálatához az iskolai ismeretanyag nem elegendő. Azoknak, akik a kérdéssel foglalkozni akarnak, a következő két ötletet adjuk. Definálni kellene, mit értsünk q -nak egy, a p -n felvett P ponthoz legközelebbi Q pontján. Vajon igaz-e, hogy PQ mindig átmegy a fenti H hasonlósági centrumon?

¹ Hack F. – Kugler S.-né: Függvénytáblázatok, Matematikai és fizikai összefüggések. Tankönyvkiadó. Budapest. 1968.

²Lásd a megoldást K. M. L. 43 (1971) 56.