

Megoldás. Az a_i, b_i sorozatok számtani sorozatok; így első k tagjuk összege

$$s(k) = a_1 + a_2 + \dots + a_k = k \frac{a_1 + a_k}{2} = k \frac{1 + 1 + 2(k-1)d}{2} = k + k(k-1)d,$$

amiből külön számolás nélkül $t(k)$ értéke is kiolvasható, ha $s(k)$ -ban d helyére $d/2$ -t írunk:

$$t(k) = k + k(k-1) \frac{d}{2}.$$

Mivel d természetes szám, az a_i, b_i sorozatok tagjai, és ezek összegei is természetes számok, így joggal beszél a feladat e sorozatok első $t(n)$, illetve első $s(n)$ tagjának az összegéről.

Mivel A_{n+1} az a_i sorozat első $t(n+1)$, és A_n az a_i sorozat első $t(n)$ tagjának az összege, és $t(n) < t(n+1)$, azért az $A_{n+1} - A_n$ különbség egyenlő az a_i sorozatnak a $(t(n)+1)$ -edik tagjától a $t(n+1)$ -edik tagjáig terjedő szeletében levő tagok összegével. Ez az összeg – ismét a számtani sorozat összegére vonatkozó ismert tétel szerint – egyenlő a két szélső tag számtani közepének – jelöljük ezt S_n -nel – és a tagok számának a szorzatával. A tagok száma $t(n+1)$ és $t(n)$ különbsége, ami nem más, mint b_{n+1} . Eszerint

$$A_{n+1} - A_n = S_n \cdot b_{n+1},$$

ahol

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}(a_{t(n)+1} + a_{t(n+1)}) = \frac{1}{2}[(1 + 2t(n) \cdot d) + (1 + 2(t(n+1) - 1) \cdot d)] = \\ &= 1 + [t(n) + t(n+1) - 1]d = 1 + \left[n + n(n-1) \frac{d}{2} + n + n(n+1) \frac{d}{2} \right] \cdot d = \\ &= 1 + 2nd + n^2 d^2 = (1 + nd)^2 = b_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Emiatt $A_{n+1} - A_n = b_{n+1}^3$, ami valóban egy természetes szám köbe. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$B_{n+1} - B_n = T_n \cdot a_{n+1},$$

ahol T_n a b_i sorozat $[s(n)+1]$ -edik és $s(n+1)$ -edik tagjának a számtani közepe:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2}(b_{s(n)+1} + b_{s(n+1)}) = \frac{1}{2}[1 + s(n) \cdot d + 1 + (s(n+1) - 1) \cdot d] = \\ &= 1 + [s(n) + s(n+1) - 1] \cdot \frac{d}{2} = 1 + [n + n(n-1) \cdot d + n + n(n+1) \cdot d] \cdot \frac{d}{2} = \\ &= 1 + nd + n^2 d^2. \end{aligned}$$

Emiatt

$$B_{n+1} - B_n = (1 + nd + n^2 d^2)(1 + 2nd) = (nd)^3 + (1 + nd)^3,$$

ami valóban két köbszám összege.

Megjegyzések. 1. Eredményeink így is kimondhatók:

$$A_{n+1} - A_n = b_{n+1}^3, \quad B_{n+1} - B_n = b_{n+1}^3 + (b_{n+1} - 1)^3,$$

ezek különbségéből pedig, bevezetve a $C_k = B_k - A_k$ jelölést:

$$(B_{n+1} - A_{n+1}) - (B_n - A_n) = C_{n+1} - C_n = (b_{n+1} - 1)^3 = (nd)^3,$$

vagyis az így értelmezett C -sorozatban is bármely két egymás utáni tag különbsége egyenlő egy természetes szám köbével.

Garay Barnabás (Sopron, Széchenyi I. Gimn., IV. o. t.)

2. A legegyszerűbb speciális esetben $d = 1$ és a két számtani sorozat:

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots, \quad \text{ill.} \quad 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Ezekből a megoldásban említett szeleteket külön sorokba írva és a sorokból háromszög alakú táblázatokat alakítva, két közismert érdekességet kapunk: a bal oldali táblázat minden egyes sorának összege köbszám, a jobb oldali táblázatban pedig két egymás utáni köbszám összegét kapjuk minden egyes sor számainak összegeként.

		1						1						
		3		5				2	3	4				
	7		9		11			5	6	7	8	9		
13		15		17		19		10	11	12	13	14	15	16