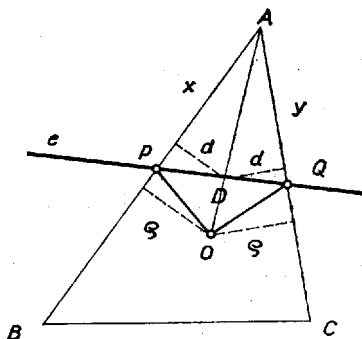


I. megoldás. Tegyük fel, hogy valamely e egyenes felezi az $ABC = H$ háromszög kerületét. Az e egyenes H -nak legalább két oldalszakaszát metszi, válasszuk úgy a betűzést, hogy e messe az AB , AC szakaszokat (de ne menjen át A -n), jelöljük a metszéspontokat rendre P -vel, Q -val, a H -ba írt kör középpontját O -val. Megmutatjuk, hogy az APQ négyszög területe egyenlő H területének a felével.



E négyszöget az AO egyenes két háromszögre vágja szét, amelyek AP , AQ oldalához tartozó magassága a H -ba írt kör sugara. Ezért a négyszög területe

$$t_1 = \frac{\rho}{2}(AP + AQ).$$

Feltevésünk szerint $AP + AQ = s$ (a szokásos módon s a háromszög fél kerületét jelöli), tehát $t_1 = \frac{1}{2}\rho s$. Ismeretes másrészt, hogy H területe egyenlő $\rho \cdot s$ -sel; $t = \rho s$, tehát $t_1 = 1/2 t$, amint azt bizonyítani akartuk.

Ha e a H területét is felezi, akkor az APQ háromszög területe is $t/2$ -vel egyenlő, tehát APQ területe egyenlő az APQ négyszög területével. Ez csak úgy lehet, ha O a PQ egyenesen van, hiszen ha O az APQ háromszög belsejében volna, akkor az APQ négyszög területe kisebb volna APQ területénél, ha pedig O kívül volna az APQ háromszögon, akkor csak az AP , AQ egyenesek között, a PQ egyenes A -t nem tartalmazó oldalán lehetne, akkor pedig APQ területe nagyobb lenne APQ területénél. Tehát O rajta van a PQ egyenesen, feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk. (Ábránk szándékosan torzított.)

Bizonyításunk azt az esetet is tartalmazza, ha P egybeesik B -vel, vagy Q egybeesik C -vel.

II. megoldás. Tovább használjuk az I. megoldásban bevezetett jelöléseket, és az eredeti háromszög A csúcsához tartozó szögfelezőjének és a PQ egyenesnek a metszéspontját D -vel jelöljük. D egyenlő távol van az AP , AQ egyenesektől, jelöljük ezt a távolságot d -vel. Tegyük fel, hogy e felezi H területét is, kerületét is. Azt fogjuk megmutatni, hogy ekkor $d = \rho$, ebből már következik, hogy O rajta van a PQ egyenesen, hiszen d és ρ csak akkor lehetnek egyenlőek, ha D és O azonosak.

Az APQ háromszöget az AD egyenes két háromszögre vágja szét, e részek területe $\frac{1}{2}d \cdot AP$, illetve $\frac{1}{2}d \cdot AQ$. Tehát APQ területe

$$\frac{1}{2}d(AP + AQ) = \frac{1}{2}ds,$$

viszont ez a terület $\frac{t}{2}$ -vel is egyenlő, tehát $d = \frac{t}{s}$. Mivel $\frac{t}{s}$ a ρ -val is egyenlő, ebből következik, hogy $d = \rho$, amint azt bizonyítani akartuk.

Megjegyzés. Megmutatjuk, hogy mindig van olyan egyenes, amely H területét is, kerületét is felezi. Jelöljük az AP , AQ távolságokat rendre x -szel, y -nal. e felezi H területét is, kerületét is, ha

$$xy = \frac{bc}{2} \quad \text{és} \quad x + y = \frac{a + b + c}{2},$$

ahol a , b , c H oldalainak a hosszát jelöli. Ezek szerint x és y a

$$(1) \quad z^2 - \frac{a + b + c}{2}z + \frac{bc}{2} = 0$$

másodfokú egyenlet gyökpárjával egyenlőek. (1) bal oldalának az értéke $z = 0$ mellett $\frac{bc}{2}$, ami mindig pozitív, $z = b$ és $z = c$ mellett pedig $\frac{b}{2}(b - a)$, illetve $\frac{c}{2}(c - a)$. Ha például $c < a < b$, akkor (1) bal oldala a $z = 0$, c , b helyeken rendre pozitív, negatív, pozitív, tehát (1) egyik gyöke 0 és c , a másik c és b között van. Az elsőt választva x -nek, a másodikat y -nak, olyan szakaszokat kapunk, melyeket az AB , illetve AC egyenesre felmérve a szakaszok végpontjai H területét és kerületét is felező egyenest határoznak meg. (Gondolja át az olvasó a $c = a$ és $a = b$ eseteket is.)