

Vegyük észre, hogy a szumma általános tagjában – tehát minden tagjában – a számláló egyenlő a nevező második és első tényezőjéből képezett különbséggel. Eszerint minden tag olyan két tört különbségeként írható, melyek közös számlálója 1, nevezőik pedig a mondott tényezők:

$$\frac{n-i}{(2i+1)(n+i+1)} = \frac{(n+i+1)-(2i+1)}{(2i+1)(n+i+1)} = \frac{1}{2i+1} - \frac{1}{n+i+1}.$$

Ennek alapján S két más szumma különbségeként írható:

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i+1} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i+1} = S_1 - S_2.$$

A két új szummában előforduló nevezők:

$$3, 5, 7, \dots, 2n+1, \quad \text{ill.} \quad n+2, n+3, \dots, 2n+1$$

kettesével, ill. egyesével növekszenek, és a két felsorolás legnagyobb tagja közös. Mondhatjuk így is: a $2n+1$ -ig terjedő természetes számok közül az elsőben 1 és a páros számok hiányoznak, a másodikban pedig $n+1$ -ig terjedően minden természetes szám hiányzik. Ennek alapján mindkét szummát különbségként írhatjuk: kisebbítendőnek véve a $2n+1$ -ig terjedő természetes számok reciprokából képezett szummát – ez tehát közös lesz –, kivonandónak pedig az ezáltal behozott, eredetileg nem szereplő számok reciprokából képezett szummákat:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

Különbségükből a közös tag kiesik, és az első szumma utolsó tagját külön kiírva összevonás lehetséges:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{n}{n+1},$$

ami egyszerűbbnek tekinthető az eredeti alakhoz hasonlítva. Az itt szereplő szumma nem írható fel zárt alakban n függvényeként.

Szendrei Ágnes (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., IV. o. t.)