

Vezessük be (inkább csak a kényelmesebb leírás kedvéért) az

$$(3) \quad \alpha = x + y, \quad \beta = x - y$$

változókat, az α, β változópár és az x, y pár nyilván kölcsönösen és egyértelműen meghatározzák egymást. Helyettesítsük be új változóinkat az (1), (2) egyenletekbe. (1) bal oldalán $\sin 2x + \sin 2y = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta$ áll, tehát (3) mellett (1) ekvivalens az

$$(1.a) \quad 2 \sin \alpha \cos \beta = a$$

egyenlettel. Hasonlóan kapjuk (2) helyett a vele ekvivalens

$$(2.a) \quad 2 \cos \alpha \cos \beta = b$$

egyenletet. Emeljük négyzetre e két egyenletet, és adjuk össze négyzetüket:

$$(4) \quad 4 \cos^2 \beta = a^2 + b^2,$$

eszerint az (1)–(2) egyenletrendszer csak akkor oldható meg, ha

$$(5) \quad a^2 + b^2 \leq 4.$$

Ha $a^2 + b^2 = 0$, akkor $a = b = 0$, és (4) szerint $\cos \beta = 0$, ami már önmagában maga után vonja (1.a) és (2.a) teljesülését, tehát ekkor α értéke tetszőleges. Ha $a^2 + b^2 > 0$, akkor (4) és (2.a) alapján

$$\cos \beta = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ezek az értékek valóban lehetnek egy-egy szög cosinusai, és az ezekből meghatározott α, β szögek gyökei az (1.a)–(2.a) egyenletrendszernek. Tehát (5) a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy legyen olyan x, y szögpár, melyre (1) és (2) teljesül, így (5)-öt fel kell tennünk, hogy a

$$t = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$$

kifejezés értékét meghatározhassuk.

Új változóinkkal t értéke (feltéve, hogy értelmezve van, azaz x és y olyan szögek, amelyeknek van tangensük):

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \\ &= \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos \beta}. \end{aligned}$$

Láttuk, hogy ha $a = b = 0$, akkor $\cos \alpha$ értéke tetszőleges, azaz ebben az esetben (1) és (2) nem határozza meg egyértelműen t értékét. Mivel ekkor $t = 2 \operatorname{tg} \alpha$, azért t értéke tetszőleges valós szám lehet, és az is lehet, hogy t nincs értelmezve.

Ha $a^2 + b^2 > 0$, akkor (4) szerint $\cos \beta \neq 0$, tehát bővíthetjük a t -re kapott törtet $\cos \beta$ -val:

$$t = \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta}.$$

A vizsgált kifejezés akkor és csakis akkor van értelmezve, ha itt a nevező értéke nem 0. Ez a feltétel (4) és (2.a) alapján ekvivalens a

$$(6) \quad a^2 + b^2 + 2b \neq 0$$

feltétellel. Ha ez teljesül, akkor

$$(7) \quad t = \frac{4a}{a^2 + b^2 + 2b}.$$

Tehát (1) és (2) csak akkor határozza meg egyértelműen $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$ értékét, ha $0 < a^2 + b^2 \leq 4$, és teljesül (6), és ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor (1) és (2) fennállása esetén $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$ egyenlő a (7) jobb oldalán álló kifejezéssel.