

Előzetes megjegyzés. Az I–III. megoldások – egymásra részben támaszkodva – egyre kisebb n értékeket adnak meg, viszont egyre erősebb megfontolások igénybevételével.

I. megoldás. Minden $n > 1000$ esetén $1/n$ -ben a tizedes vessző után legalább három zérus következik, és ha n nem osztható sem 2-vel, sem 5-tel akkor ezek a számjegyek – mint ismeretes¹ – hozzátartoznak a szakaszhoz. A legkisebb ilyen érték $n = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, és erre valóban $1/1001 = 0,000\,999\,000\,9\dots$, kétféle, három jegyből álló egymásutánnal is teljesíti a követelményt.

Korányi László (Budapest, Móricz Zs. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy a kívánt tulajdonsága nem lehet meg kétjegyű számnak, és pedig azzal, hogy nyomon követjük az $1 : n$ osztás kérdéses részében az egymás utáni maradékok alakulását. Legyen $1/n$ kifejtésében valahol három egymás utáni tizedes számjegy j , az első j -t megelőző osztási lépés maradéka r_1 , és az ez után következő maradékok rendre r_2, r_3, r_4 , természetesen mindegyikük 1 és $n - 1$ közé eső szám, e korlátokat is megengedve. Ekkor az osztás próbája szerint

$$(1) \quad 10 r_1 = jn + r_2,$$

ahol $r_2 \neq r_1$, különben ugyanis innen kezdve $1/n$ minden jegye j lenne, amit kizártunk. Eszerint

$$r_2 = r_1 + d,$$

ahol d egész szám és $|d| \geq 1$. Továbbá hasonlóan

$$\begin{aligned} r_3 &= 10r_2 - jn = 10(r_1 + d) - jn = r_2 + 10d = r_1 + 11d, \\ r_4 &= 10r_3 - jn = 10(r_1 + 11d) - jn = r_2 + 110d = r_1 + 111d, \end{aligned}$$

tehát

$$|r_4 - r_1| = |111d| \geq 111.$$

Ámde 0 és n között bármelyik két szóba jövő maradék különbsége legfőljebb $n - 2$, ennél fogva a feladat követelményeit teljesítő n -re $n \geq 113$.

Ezek alapján 100 és 1000 között olyan n -et keresünk, amelyre a három megegyező j számjegy *közvetlenül a tizedes vessző utáni két zérus jegy* után következik:

$$1/n = 0,00jjjm\dots$$

ahol m egy esetleg más számjegy. Ez az alak csak a hatodik tizedesjegytől kezdve tér el $0,00jjjj\dots$ -től, amelynek minden további jegye is j . Ez az alak, mint ismeretes, $j = 1$ esetén $N = 900$ reciproka, $j = 2$ és 3 esetén $N = 450$, ill. 300 reciproka, kézenfekvő tehát n -et az ezen N értékekkel szomszédos számok között keresnünk.

$n = 299$ nem felel meg, mert $1/299$ -ben az első $j = 3$ -as jegy előtti maradék $r_1 = 100$, ezt $r_2 = 103$ követi, tehát a fenti d értéke 3, így pedig $r_4 = r_1 + 111d = 433 > 299$. Nem felel meg a szigorított követelménynek $n \leq 298$ sem.

$n = 301$ mellett hasonlóan $d = -3$ és $r_4 < 0$, tehát ez sem felel meg; viszont teljesül a követelmény $n = 449$ esetében: $r_1 = 100$, $d = 2$, $r_4 = 322 < 449$, $1/449 = 0,002\,227\,1\dots$ és a szakasz itt is közvetlenül a tizedesvessző után kezdődik. A szakasz egyező számjegyei helyének fenti pótkövetelménye mellett ez a legkisebb megoldása kérdésünknek.

Hasonlóan megfelel a 900-at megelőző számok közül 899, 898, 897, 895, 894 és 893 is, de a párosak és 895 esetében ezt csak egy, a vegyes szakaszos tizedes törtre érvényes tétel alapján lehet bizonyítani.

Szeredi János (Budapest, II. Rákóczi F. Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. Tűzzük ki célul egy, a 200-nál kisebb n keresését. Ekkor a fenti $|r_4 - r_1| = |111d|$ csak $|d| = 1$ mellett teljesülhet. Írjuk (1)-et így:

$$(2) \quad 10r_1 = jn + r_1 + d, \quad 9r_1 - d = 9r_1 \mp 1 = jn.$$

Eszerint j nem lehet 0, 3, 6 és 9, mert a bal oldal nem osztható 3-mal. Továbbá (2)-ből

$$(3) \quad r_1 = \frac{jn + d}{9}, \quad \text{ill.} \quad (4) \quad n = \frac{9r_1 - d}{j}.$$

Mármint $d = +1$ esetén $0 < r_4 < n$ alapján

$$\begin{aligned} 0 < r_4 = r_1 + 111 &= \frac{jn + 1}{9} + 111 = \frac{jn + 1000}{9} < n, \\ 1000 < (9 - j)n < 200(9 - j), & \quad j < 4, \end{aligned}$$

¹ Ha a és b természetes számok, és b relatív prím a 10-hez képest, akkor az a/b hányados végtelen tizedestört kifejtésében a szakasz közvetlenül a tizedesvessző után kezdődik. Lásd pl. *H. Radernaecher-O. Toeplitz: Számokról és alakzatokról, Középiskolai Szakköri Füzetek*, 2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954, 135–140. oldal.

tehát csak $j = 1$ és 2 jön szóba. Másrészt hasonlóan n -et kiküszöbölve

$$0 < r_4 = r_1 + 111 < \frac{9r_1 - 1}{j}, \quad r_1 > \frac{111j + 1}{9 - j}.$$

A lehetségesnek maradt $j = 1$ és $j = 2$ jegyek mellett innen $r_1 \geq 15$, ill. $r_1 \geq 32$ adódik.

Ezek az r_1 értékek és a hozzájuk (4)-ből adódó n -ek a következők:

$$(5) \quad \begin{aligned} j = 1 \text{ céljára } r_1 &= 15, 16, 17, 18, \dots, 22, \\ n &= 134, 143, 152, 161, \dots, 197; \end{aligned}$$

$j = 2$ céljára (4) alapján csak a páratlan r_1 értékek adnak egész n -et:

$$(6) \quad \begin{aligned} r_1 &= 33, 35, 37, \dots, 43, \\ n &= 148, 157, 166, \dots, 193. \end{aligned}$$

Eddigi eredményünk az, hogy a választott 200-as korlát alatt csak az (5) és (6) számok reciproka felelhet meg a feladat követelményének, de esetenkénti próbával kell eldönteni, melyik számok felelnek meg valóban. Eleve nem fér össze olyan n , r_1 értékpár, amelyben n páros és r_1 páratlan, hiszen páros n -nel osztva 10 r_1 -et, a maradék páros, nem térhet vissza r_1 akárhány osztási lépés után sem.

A talált n -ek legkisebbike: 143 nem felel meg, mert $1 : 143$ -ban csak 6 különböző maradék lép fel: 1, 10, 100, 142, 133, 43, és köztük nem szerepel az $r_1 = 16$. $n = 157$ és $n = 161$ viszont megfelelnek, erről az utóbbiban gyorsabban győződünk meg: $1 : 161 = 0,0062 \ 111 \ 801 \dots$, az előbbiben a 35–37. sorszámú tizedesjegyek 2-esek.

Lényegében ugyanezzel a gondolatmenettel $d = -1$ esetére

$$0 < r_4 = r_1 - 111 < n$$

alapján $r_1 > 111$, másrészt (3) alapján r_1 et kiküszöbölve

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{jn - 1}{9} - 111 = \frac{jn - 1000}{9}, \\ j &> \frac{1000}{n} > \frac{1000}{200} = 5, \end{aligned}$$

tehát így ismétlődő számjegyként csak $j = 7$ és 8 jöhet szóba. (4) alapján és $j = 8$ esetén a következő r_1 , n párokat kapjuk:

$$\begin{aligned} r_1 &= 119, 127, 135, 143, \dots, 175, \\ n &= 134, 143, 152, 161, \dots, 197. \end{aligned}$$

$j = 7$ esetén pedig

$$\begin{aligned} r_1 &= 115, 122, 129, 136, \dots, 160, \\ n &= 148, 157, 166, 175, \dots, 193. \end{aligned}$$

Észrevesszük, hogy ugyanazokat az n -eket kaptuk, mint $d = +1$ esetén. Valóban, a fenti osztásokat folytatva $1 : 161$ -ben a 38–40. számjegyek 8-asok és $1 : 157$ -ben a 74–76. jegyek 7-esek.

Eljárásunk azt is bizonyítja, hogy 157-nél kisebb szám nem felel meg a feladat követelményének. Azt is láttuk, hogy 157, 161 és 1001 reciprokának tizedestört kifejtésében legalább kétszer–kétszer fordul elő egymás után 3 egyező számjegy.

Földes Tamás (Budapest, Berzsényi D. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Arra az érdekességre, hogy $n = 157$ (prímszám) mellett két számjegyhármas adódott, a következő tétel ad magyarázatot. Ha p prímszám és $1 : p$ szakaszának hossza (a szakasz számjegyeinek száma) páros szám: $2h$, akkor a kifejtésben egymástól h távolságra levő két számjegy összege² 9, és pedig azért, mert két egymástól h lépésnyi különbséggel fellépő maradék összege p .

Ez a tulajdonság $n = 1001$ és 161 esetében is megmutatkozik, bár ezek nem prímek.

Másrészt $1 : 449$ kifejtésében (449 ismét prím) 16 tizedesjegy kiszámítása után a maradék $448 = n - 1$, ez a most idézett tétel megfordításával azt sejteti, hogy a szakasz hossza páros szám és meglesz a talált $\dots 222 \dots$ egymásután párja $\dots 777 \dots$ alakban; valóban, ezek a jegyek állnak a 19–21. helyeken.

²Lásd a fentebb idézett mű 148. oldalán.