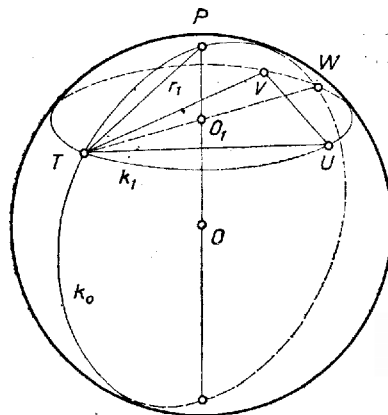


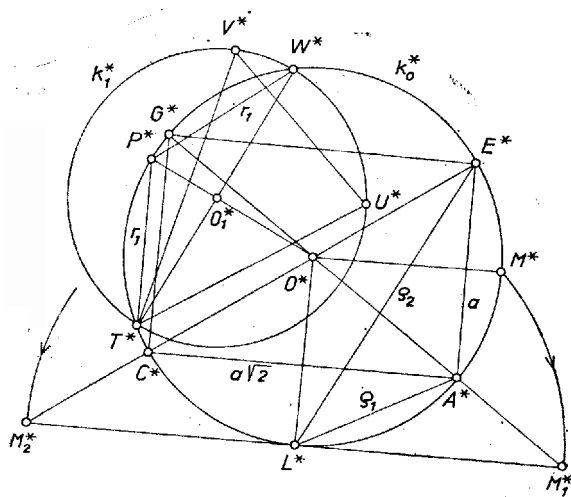
I. megoldás. αg gömb egy k_0 főkörével egybevágó (egyenlő sugarú) kört szerkesztünk egy S síkon. Ez önmagában is érdekes feladat. A főkört ismerve könnyű lesz megszerkeszteni majd a kocka élének hosszát, ebből pedig bármelyik két csúcának távolságát. g -re egy tetszőleges P pontjába szűrt körzövel és alkalmasan választott r_1 körzőnyílással k_1 kört írunk (1. ábra).



1. ábra

Körzőnk valóban kört ír g -re, mert ha a k_1 vonalnak egy T pontján kívül további pontja is van, akkor minden más pontja úgy származtatható T -ből, hogy a TOP háromszöget – ahol O a g középpontja – forgatjuk PO mint tengely körül, hiszen így TO mint gömbsugár és TP mint körzőnyílás nem változnak. T abban a síkban mozog, amely átmegy PO -n levő O_1 merőleges vetületén és merőleges PO -ra, és TO_1 is állandó, mint a forgatott háromszög magassága, ez a k_1 (valódi) sugara.¹

Legyen k_1 nek két további pontja U és V . Szerkesszük meg S -en a körzőnyílásba vett TU , UV , VT szakaszokból a $T^*U^*V^*$ háromszöget és ennek k_1 körülírt körét,² ezek egybevágók a TUV háromszöggel, ill. k_1 gyel (2. ábra) (!).



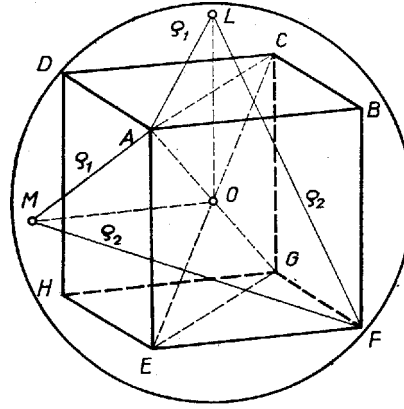
2. ábra

Jelöljük ki k_1^* -nak T^* -gal átellenes W^* pontját, szerkesszük meg a T^*W^* átmérő mint alap egyik oldalán $PT = r_1$ szárral a $P^*T^*W^*$ egyenlő szárú háromszöget, végül ennek k_0^* körülírt körét, ez a gömbünk (P , T pontjain átmenő) k_0 főkörének S -beli megfelelője (!).

β) Legyen egy a g -be beírt K kocka egyik lapja $ABCD$, erre merőleges élei rendre AE , BF , CG , DH (3. ábra).

¹További állításaink bizonyítását helyszűke miatt az olvasóra hagyjuk; a kihagyott bizonyítások eredeti helyét így jelöltük meg: (!).

²A g bármely elemének S -beli megfelelőjét úgy jelöljük, mint magát az elemet, de megkülönböztetésül *-ot írunk melléje.



3. ábra

Ekkor K középpontja O -ban van és az $AEGC$ átlós síkmetszet körülírt köre egybevágó k_0^* -gal (!). Ezek alapján az $AE = a$ él és az $AC = a\sqrt{2}$ lapbeli átló hosszát az alábbi lépésekben kapjuk: k_0^* -hoz egy L^* pontjában érintőt szerkesztünk, kijelöljük az O^*L^* -ra merőleges átmérő egyik végpontját, M^* -ot, ezt L^* körül ráforgatjuk az érintőre az M_1^*, M_2^* pontokba, végül az $M_1^*O^*, M_2^*O^*$ egyenesekkel metsszük k_0^* -ot az A^*, G^* , ill. C^*, E^* pontokban (2. ábra). Ekkor az $A^*E^*G^*C^*$ téglalap két oldala a és $a\sqrt{2}$ (!).

γ) Mármost K csúcsait egy a g -n tetszés szerint választott A -ból kiindulva az alábbi 1–6. körök felrajzolása útján jelölhetjük ki, mint 2 – 2 kör metszéspontját. A leírás során a g felületére az X pontjába beszúrt, y nyílású körzövel rajzolt kört röviden $X(y)$ -nal jelöljük. Köreinket a 3. ábrára nem rajzoltuk fel, mert ez síkjaik különböző állása miatt nem lenne szemléletes, viszont mindegyik körhöz felírjuk a rajtuk várt, a további körök által kimetszendő csúcspontokat.

1. Az $A(a)$ kör tetszőlegesen választott pontja B . E körön lesz rajta még a D és E csúcs.
2. A $B(a)$ körön lesz C és F (továbbá átmegy A -n).
3. Az $A(a\sqrt{2})$ kör kimetszi C -t és F -et, rajta lesz még H .
4. $B(a\sqrt{2})$ kimetszi D -t és E -t, rajta lesz még G .
5. $C(a\sqrt{2})$ kimetszi H -t (átmegy A -n és F -en).
6. $D(a\sqrt{2})$ kimetszi a még hátra levő G -t (!).

Ezzel a feladat megoldását befejeztük.

II. megoldás a gömbi főkör közvetlen megszerkesztésére. Legyen g felületének két különböző pontja P és Q . A PQ gömbi húr felező merőleges síkja g -ből főkört metssz ki, ebből 3 pontot megad a $P(c)$ és $Q(c)$ körök ($c \geq PQ$) T és U metszéspontja és a $P(d)$, $Q(d)$ körök ($d > c$) egyik, V metszéspontja. Lemásolva S -re a TUV háromszöget, ennek körülírt köre a főkörrel egybevágó.

Megjegyzések. 1. Olyan – a valóságban is használatos – körzöre gondoltunk, melynek száraiban is van egy-egy csukló (bár korlátozott forgatási lehetőséggel). Ilyennel a leszúrt tűhegytől távolabbi félgömbön is megrajzolhatjuk köreinket.

2. A körök fenti leírásából – néhol kiegészítéssel – látható, hogy bármelyik két metszésbe hozott körünknek két különböző közös pontja van, tehát metszésük rajzi szempontból is meg van határozva.

3. Bemutatunk röviden 2 más utat is a kocka csúcsainak kijelölésére. Megválasztjuk A -t, majd az $A(a\sqrt{2})$ körön C -t, ennek és a $C(a\sqrt{2})$ körnek két metszéspontja F és H (ekkor $ACFH$ egy a g -be beírt szabályos tetraéder). A hátra levő 4 csúcsot az $A(a)$, $C(a)$ és $F(a)$ körök páronkénti közös pontjai adják. Itt csak 5 kört használtunk fel.

Nevezzük az $ABCD$ lapra merőleges gömbi átmérő végpontjait e lap (és a vele párhuzamos kockalap) pólusainak. A 2. ábra szerint egy kockalap csúcsainak a két pólustól való távolsága $L^*A^* = \varrho_1$ és $L^*G^* = \varrho_2$, másrészt gömbi főkört L^*M^* körzőnyílással rajzolhatunk. Ezeket felhasználva megválaszthatjuk L -et, majd az $L(L^*M^*)$ körön M -et mint az $ABCD$, ill. $ADHE$ lap egyik-egyik pólusát, így K csúcsait az $L(\varrho_1)$, $L(\varrho_2)$, $M(\varrho_1)$, $M(\varrho_2)$ körök metszéspontjai adják (itt is 5 kört rajzoltunk).

Természetesen kombinálhatunk is a , $a\sqrt{2}$, ϱ_1 és ϱ_2 körzőnyílású köröket.