

Legyen az adott parabola egyenlete

$$(1) \quad y = ax^2$$

ahol a tetszőleges pozitív szám. A parabola (x_0, y_0) koordinátájú pontjához tartozó érintő m meredeksége egyenlő az ax^2 függvény x_0 -beli deriváltjával:

$$(2) \quad m = 2ax_0,$$

és az illető érintő egyenlete, mindjárt $y_0 = ax_0^2$ helyettesítéssel, rendezéssel

$$(3) \quad y - y_0 = 2ax_0(x - x_0), \quad y + ax_0^2 = 2ax_0x.$$

Ha a sík tetszőleges $P(u, v)$ koordinátájú pontjából érintőt akarunk húzni a parabolához, akkor meg kell keresnünk a parabolának azt (vagy azokat) az érintőjét (érintőit), amelyek átmennek P -n. Eszerint olyan x_0 -t keresünk, amelyre a (3) egyenletű egyenes átmege az (u, v) ponton, azaz teljesül:

$$(4) \quad v + ax_0^2 = 2ax_0u.$$

Ez adott (u, v) pont esetén másodfokú egyenlet az x_0 ismeretlenre. Mivel (4)-ből átrendezéssel az

$$(5) \quad a(x_0 - u)^2 = au^2 - v$$

egyenletet kapjuk, azért (4)-nek akkor és csakis akkor van két (különböző) valós megoldása, ha

$$(6) \quad au^2 > v.$$

(Ez a feltétel szemléletesen azt jelenti, hogy a $P(u, v)$ pont a parabola (u, au^2) pontja alatt van, egyszerűen: P az (1) egyenletű parabola alatt van.)

Ha tehát P koordinátáira teljesül (6), akkor P -ből a parabolához két érintő húzható. Jelöljük ezek meredekségét m' -vel és m'' -vel, ezek az illető egyeneseknek az x tengellyel bezárt α' és α'' szögeinek a tangensei. A két érintő közti szög (ez megállapodás szerint a két egyenes által meghatározott szögek közül a 90° -nál nem nagyobbat jelenti) akkor 45° , ha $|\alpha' - \alpha''| = 45^\circ$ vagy $|\alpha' - \alpha''| = 135^\circ$,

$$\text{azaz} \quad |\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha'')| = \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha''}{1 + \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha''} \right| = \left| \frac{m' - m''}{1 + m'm''} \right| = |\operatorname{tg}(\pm 45^\circ)| = 1.$$

Ez akkor, és csakis akkor teljesül, ha

$$(7) \quad (m' - m'')^2 = (1 + m'm'')^2.$$

Láttuk, hogy az (u, v) pontból húzott érintők érintési pontjának az x'_0, x''_0 abszcisszái a (4) egyenlet gyökei, így (2) és a gyökök és együtthatók közti összefüggés alapján

$$(8) \quad m' + m'' = 2a(x'_0 + x''_0) = 4au, \quad m'm'' = 4a^2x'_0x''_0 = 4av.$$

Célszerű tehát (7)-et úgy átalakítani, hogy benne az m', m'' meredekségek összege és szorzata szerepeljen:

$$(m' + m'')^2 - 4m'm'' = (1 + m'm'')^2.$$

Eszerint a $P(u, v)$ pont akkor és csakis akkor tartozik a vizsgált mértani helyhez, ha az (u, v) koordinátákra teljesül (6), és a (7)-ből (8) alapján kapható

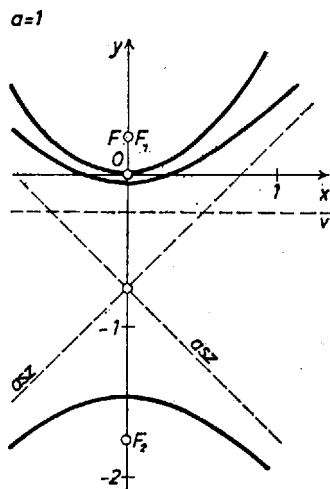
$$(9) \quad (4au)^2 - 16av = (1 + 4av)^2$$

egyenlet. Ez utóbbiból már következik (6), hiszen (9) bal oldalán $16a(au^2 - v)$ áll, ahol a zárójelbeli kifejezés (6) két oldalának a különbsége, és (9) jobb oldalán pozitív szám áll. (Nem lehet ugyanis 0 sem a (9) jobb oldalának az értéke, mert $v = -1/4a$ mellett (9) bal oldalának az értéke minden u -ra pozitív volna.) Mármint (9)-et rendezve ezt kapjuk:

$$(10) \quad \left(v + \frac{3}{4a}\right)^2 - u^2 = \frac{1}{2a^2}.$$

Ez tehát a vizsgált mértani hely egyenlete (1. ábra).¹

¹Feladatunk a *Czapáry E.–Horvay K.–Reiman I.–Dr. Soós P.*: Geometriai feladatok gyűjteménye c. mű 1. kiadásában (1964) úgy szerepelt 3954. feladatként, hogy a parabola látószöge 45° . Ez hiperbolánknak csak az alsó ágára teljesül, a felső ágon 135° a látószög.

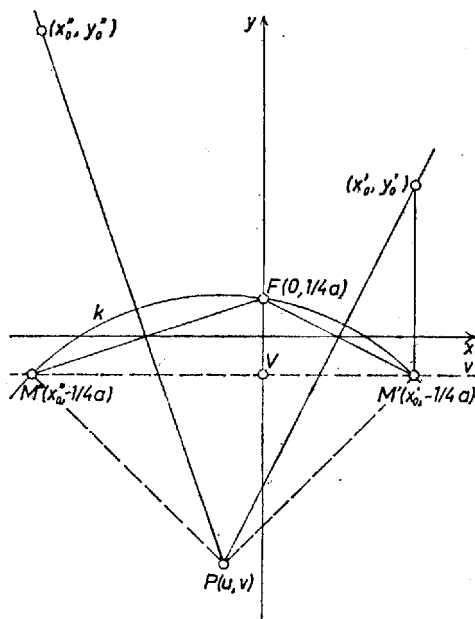


1. ábra

Megjegyzés. Láttuk, hogy a parabolához a $P(u, v)$ külső pontból húzott érintők érintési pontjainak az abszcisszái a (4) egyenlet gyökei. (4)-et (5) alapján még az

$$(11) \quad (x_0 - u)^2 + \left(-\frac{1}{4a} - v\right)^2 = (0 - u)^2 + \left(\frac{1}{4a} - v\right)^2$$

alakban is felírhatjuk, eszerint az $(x_0, -1/4a)$ pont rajta van az (u, v) középpontú és a $(0, 1/4a)$ ponton átmenő k körön (2. ábra).



2. ábra

Ebből az is kiolvasható, hogy az $y = ax^2$ parabola azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyek az $F(0, 1/4a)$ ponttól (a fókuszától) és az $y = -1/4a$ egyenestől (a vezéregyenestől) egyenlő távolságra vannak. Ha a parabola az F fókuszával és a v vezéregyenésével van megadva, akkor (11) alapján úgy lehet hozzá a P külső pontból érintőt húzni, hogy a P körüli, F -en átmenő körrel metsszük a v egyenest, és vesszük a metszéspont és F által meghatározott szakasz felező merőlegességét.

Ennek alapján visszavezethetjük feladatunkat az 1698. feladatra.² Legyenek ugyanis a P körüli, F -en átmenő k kör és a v egyenes metszéspontjai M' és M'' . Az FM' , FM'' szakaszok felező merőlegesei közti szög akkor lesz 45° -os, ha $M'P$ és $M''P$ merőlegeseik egymásra, vagyis a $PM'M''$ szög 45° -os, és ugyanennyi k és v szöge is. Az 1698. feladat megállapítása szerint azoknak a P pontoknak a mértani helye, amelyek körül F -en átmenő kört rajzolva e kör v -t $\alpha = 45^\circ$ -os szögben metszi, az a hiperbola, amelynek egyik fókusza F , centruma az FV egyenesnek az a C pontja (V az F vetülete v -n), amelyre

$$FC = \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) \cdot FV,$$

²Lásd a megoldását K. M. L. 42 (1971) 52. old.

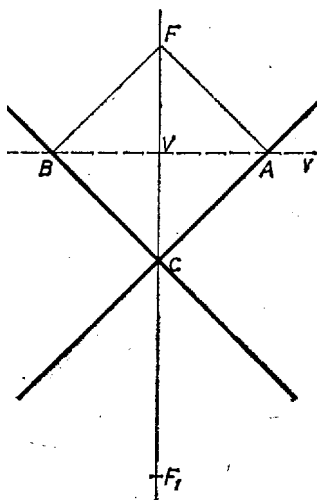
tehát $\alpha = 45^\circ$ mellett C az F pont v -re vonatkozó tükörképe, és a hiperbola valós tengelyének fele-hossza

$$a = \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} FV = \sqrt{2} \cdot FV.$$

A kapott eredményt szemlélteti a 3. ábra: legyen az $FACB$ négyzet AB átlója a v egyenesen, F -nek C -re vonatkozó tükörképe pedig legyen F_1 . Ekkor azoknak a P pontoknak a mértani helye, amelyekből az F fókuszú, v vezéregyenesű parabolához húzott érintők közti szög 45° -os, a

$$(12) \quad |PF - PF_1| = 2 \cdot AC$$

tulajdonsággal definiált görbe, vagyis az az F, F_1 fókuszú hiperbola, melyre nézve a valós tengely fele-hossza AC . (Aszimptotái az AC, BC egyenesek.)



3. ábra

Ha tudjuk, hogy

$$\frac{(y - c_2)^2}{a^2} - \frac{(x - c_1)^2}{b^2} = 1$$

annak a hiperbolának az egyenlete, amelyiknek a valós tengelye párhuzamos az y tengellyel, valós tengelyének fele a , képzetes tengelyének fele b és centrumának a koordinátái (c_1, c_2) , akkor a vizsgált mértani hely (12) alatti geometriai definíciója (10)-ből is kiolvasható.