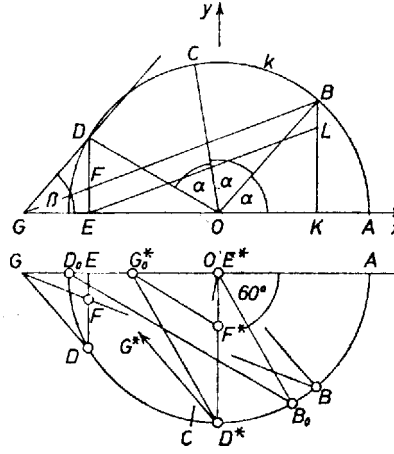


I. megoldás. A leírt alakzat szerkesztésében csak a G metszéspont létrejötte lehet kétséges. A mondott $\alpha < 60^\circ$ (és a hallgatólagosan feltett $\alpha > 0^\circ$, enélkül nem lehetne $\alpha \rightarrow 60^\circ$) feltétel mellett, hosszúságegységnek OA -t véve

$$EF = \frac{1}{3} \sin 3\alpha = \sin \alpha - \frac{4}{3} \sin^3 \alpha < \sin \alpha = BK,$$

ahol K a B pont vetülete OA -n (1. ábra felső része), tehát az AO és BF egyenesek nem párhuzamosak, G valóban létrejön, éspedig a KE félegyenes E -n túli részén.



1. ábra

Messe az E -n át BF -fel párhuzamosan húzott egyenes BK -t L -ben, és jelöljük az OGD szöget β -val. Mivel a szerkesztés szerint β mindig hegyesszög, elég a tangensét meghatározni:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{ED}{GE} = 3 \frac{EF}{GE} = 3 \frac{KL}{EK}.$$

Szerkesztésünk szerint

$$KL = KB - EF = \sin \alpha - \frac{1}{3} \sin 3\alpha, \quad EK = \cos \alpha - \cos 3\alpha.$$

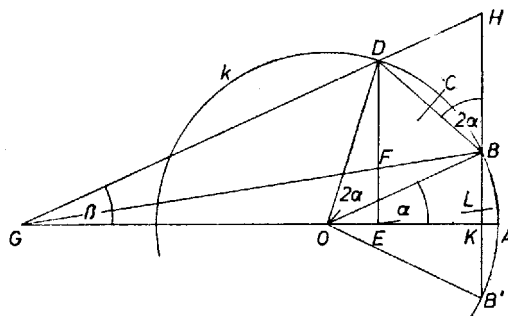
(Az utóbbi megállapításban arra a koordináta-rendszerre gondolunk, amelynek origója O , pozitív x tengelye az OA félegyenes; ebben K és E abszcisszája $\cos \alpha$, ill. $\cos 3\alpha$.) Ezek szerint

$$(1) \quad \operatorname{tg} \beta = 3 \frac{\sin \alpha - \frac{1}{3} \sin 3\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha}.$$

A jobb oldalon álló függvény α -nak folytonos függvénye (ahol csak értelmezve van, vagyis mindenütt, ahol $\cos \alpha \neq 0, \pm 1$). Tehát $\alpha \rightarrow 60^\circ$ mellett a határértéke egyenlő az $\alpha = 60^\circ$ melletti értékével, ez pedig $\sqrt{3}$.

A β szög tangense tehát tart a 60° -os szög tangenséhez, ha $\alpha \rightarrow 60^\circ$. Mivel $0 < x < 90^\circ$ mellett a tangens függvény monoton növekedő, tetszőleges ε -hoz van olyan δ , hogy ha $|60^\circ - x| < \varepsilon$ -e, akkor $|\operatorname{tg} x - \sqrt{3}| < \delta$. Válasszuk α -t olyan közel a 60° -hoz, hogy $|\operatorname{tg} \beta - \sqrt{3}| < \delta$ legyen, akkor $|60^\circ - \beta| < \varepsilon$, tehát $\alpha \rightarrow 60^\circ$ esetén $\beta \rightarrow 60^\circ$.

II. megoldás. Legyen B vetülete AO -n K , tükörképe AO -ra B' és a GD és BB' egyenesek metszéspontja H (2. ábra).



2. ábra

Így $BK \parallel DE$, tehát $FE = DE/3$ alapján B a KH szakasz K -hoz közelebbi harmadoló pontja, és $BH = 2BK = BB' = BD$, hiszen a $BB'O$ és BDO egyenlő szárú háromszögek O -nál levő szöge 2α . Ezért egyrészt a BDH háromszög egyenlő szárú, másrészt B -nél levő DBB' külső szögét a BO egyenes felezi (a DBO szög is és a $B'BO$ szög is pótszöge α -nak), tehát BO párhuzamos a DH alappal. Ennélfogva B minden szóba jövő helyzetében $OGD \angle = AOB \angle = \alpha$, és ha $\alpha \rightarrow 60^\circ$ akkor $OGD \angle \rightarrow 60^\circ$.

Párkány Erzsébet (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

Gurszky Zoltán (Vác, Sztáron S. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az $\alpha = \beta$ összefüggést (1) alapján is beláthattuk volna. Ez az összefüggés különben bizonyítható az 1322. gyakorlat¹, állítása alapján is, feladatunk ebből a gyakorlatból származik.

2. Ha $\alpha \rightarrow 60^\circ$, akkor D pont tart a k kör A -val átellenes D_0 pontjához, és D -vel együtt D_0 -hoz tartanak az E, F, G pontok is: a DEG háromszög oldalainak a hossza 0-hoz tart, e háromszög a D_0 pontra „zsugorodik össze”. (Tükörkép az 1. ábra alján.) Emiatt a kért OGD szög is „elvész a szemünk előtt”, határhelyzetét nem látjuk, mert a GD egyenest meghatározó 2 pont határhelyzete ugyanaz a D_0 pont.

Avégett, hogy ezt megakadályozzuk, rajzoljuk meg az $\alpha \rightarrow 60^\circ$ értékekhez a DEG háromszöghöz hasonló $D^*E^*G^*$ háromszöget, melyben a D^*E^* szakasz hossza α -tól függetlenül egységnyi. Ha G tart D_0 -hoz, a BG egyenes tart a B_0D_0 egyeneshez, ahol B_0 a B pont határhelyzete $\alpha \rightarrow 60^\circ$ esetén, azaz $AOB_0 \angle = 60^\circ$. Mivel $AD_0B_0 \angle = AOB_0 \angle / 2 = 30^\circ$, az EGF szög határértéke 30° , azaz rögzített E^*, D^* mellett a G^* olyan G_0^* ponthoz tart, melyre az $E^*F^*G_0^*$ háromszögben E^* -nál derékszög, G_0^* -nál 30° -os szög van (F^* az E^*D^* szakasz E^* -hoz közelebbi harmadolópontja). Tehát az $E^*G_0^*D^*$ háromszög egy szabályos háromszög fele, $E^*G_0^*D^* \angle = 60^\circ$.

Az elmondottakkal csupán szemléltetni kívántuk a feladat állítását, a fenti gondolatmenetben szereplő állításokat nem bizonyítottuk be, még azt sem mondtuk meg, mi ezeknek az állításoknak a pontos jelentése. Megjegyezzük azonban, hogy e vázlatos „bizonyítás” egzakt tételének nincs akadály, a határérték fogalma geometriai alakzatokra is kiterjeszthető.

¹K. M. L. 42 42 (1971) 68. oldal.