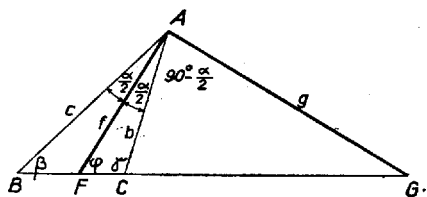


I. megoldás. I. Legyen a háromszög a szokásos jelöléssel ABC , a szögfelezők $f = AF$, $g = AG$, és válasszuk úgy a betűzést, hogy $AB > AC$ legyen (hiszen g véges volta miatt $AB \neq AC$), így pontjaink sorrendje a BC egyenesen B, F, C, G .



A belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra, így az FGA derékszögű háromszögből meghatározható az $AFG = AFC = \varphi$ szög, így pedig háromszögünk szögei:

$$(1) \quad \beta = \varphi - \frac{\alpha}{2}, \quad \gamma = 180^\circ - \left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ezekkel a sinustétel alapján, előbb az ABF , ACF háromszögből az addíciótételt is felhasználva

$$(2) \quad c = AB = f \frac{\sin(180^\circ - \varphi)}{\sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{f \cdot FG \sin \varphi}{FG \sin \varphi \cos \frac{\alpha}{2} - FG \cos \varphi \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{fg}{g \cos \frac{\alpha}{2} - f \sin \frac{\alpha}{2}},$$

ugyanígy

$$(3) \quad b = AC = f \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma} = \frac{fg}{g \cos \frac{\alpha}{2} + f \sin \frac{\alpha}{2}},$$

végül a keresett háromszögből

$$(4) \quad a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{fg \sqrt{f^2 + g^2} \sin \alpha}{g^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - f^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Ezzel megadtuk az oldalaknak az adatokkal való kifejezéseit.

A számítás valódi háromszöget ad, ha c nevezője pozitív (mert akkor a nevezője is pozitív):

$$g \cos \frac{\alpha}{2} - f \sin \frac{\alpha}{2} > 0,$$

amiből

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < \frac{g}{f} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{\alpha}{2} < \varphi,$$

hiszen f, g pozitívak, másrészt $\alpha/2$ és φ hegyesszögek.

Ugyanerre a feltételre vezet a háromszög szerkesztő megoldása, az AB félegyenes B pontjának az FG szakasz F -en túli meghosszabbításán kell lennie, evégett az FAB szögnek kisebbnek kell lennie az AFG szög A -beli váltószögénél.

II. A számadatokkal $\varphi = 66^\circ 5'$, $\beta = 51^\circ 5'$, $\gamma = 98^\circ 55'$, $b = 98,08$, $c = 124,5$, $a = 63,03$ egység. (A numerikus számítás egyszerűbb $\operatorname{tg} \varphi = g/f$ -ből φ, β és γ kiszámításával, mint (2)–(4) alapján.)

Garay András (Sopron, Széchenyi I. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Területi megfontolásokkal vezetjük le a fenti kifejezéseket. Az FGA derékszögű háromszög területe egyenlő az ACF és ACG háromszögek területének összegével is és az ABG és ABF területének különbségével is. Mindegyik terület 2-szeresét két oldal és a bezárt szög sinusa szorzataként írva

$$bf \sin \frac{\alpha}{2} + bg \cos \frac{\alpha}{2} = fg, \quad cg \sin \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) - cf \sin \frac{\alpha}{2} = fg,$$

ahonnan kiemeléssel, osztással (3)-ra, ill. (2)-re jutunk.

Másrészt az FGA háromszög A -ból induló magassága közös az ABC háromszögével, így területeik aránya egyenlő alapjaik arányával

$$\frac{a}{\sqrt{f^2 + g^2}} = \frac{bc \sin \alpha}{fg},$$

ahová b, c kifejezéseit behelyettesítve (4)-et kapjuk.

Pataricza András (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)