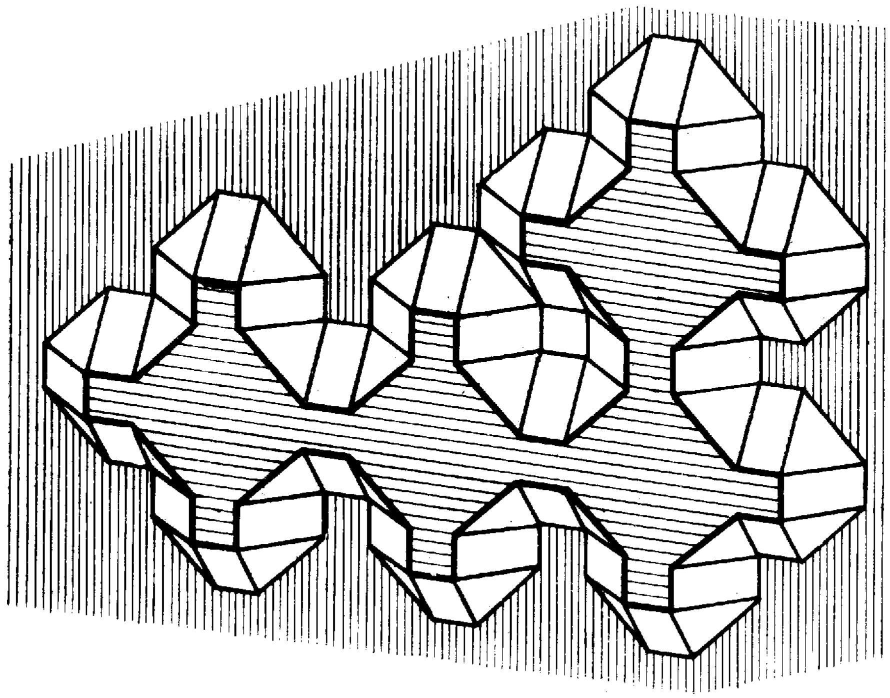
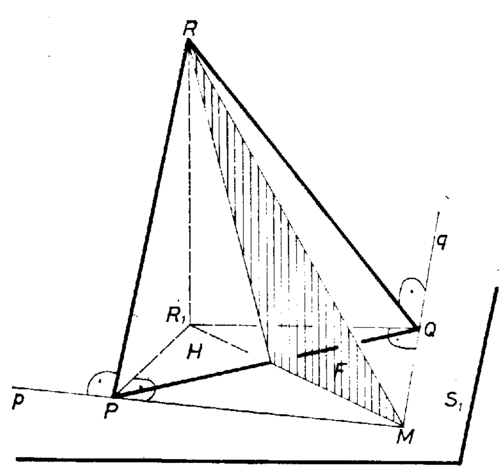
A kérdés kissé szokatlan feltevése – a „lehet” szóval – azt sejteti, hogy a válasz nem egyértelmű, több ilyen test van, és a térfogatuk természetesen más és más. Ezért először azt fogjuk megvizsgálni, melyek azok a testek, amelyekre ráillik a feladatbeli leírás. Külön figyelmet fordítunk azokra a meggondolásokra, amelyekben a konvexséget használjuk fel, mert a versenyzők ezeket a részeket elnagyolták, „ösztönösen” jól alakították ki a testeket, de nem mutatták meg, hogy miért kell ezeknek a testeknek éppen olyanoknak lenniük, mint amilyenek, és így nem bizonyították be, hogy az általuk adott értékek a feladat összes megoldásai. Egy pillantás az 1. ábrára meggyőz arról, hogy ha a konvexséget nem tennénk fel, akkor végtelen sok test felelne meg a követelményeknek.



1. ábra

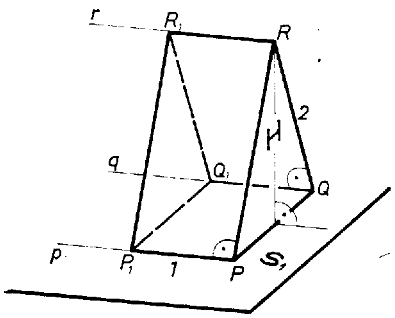
1. Állítsuk képzeletben vízszintesre azokat a párhuzamos síkokat, amelyek a vizsgált T test csúcsait hordozzák, és jelöljük őket S_1-gyel és S_2-vel. Nevezzük a testnek az S_1 és S_2 közötti lapjait oldallapoknak, és legyen H a T tetszőleges háromszög alakú oldallapja. Tegyük fel, hogy H-nak S_1-ben két csúcsa van, jelöljük ezeket P-vel, Q-val, és legyen R a harmadik csúcs. Jelöljük a H-hoz PR-ben csatlakozó oldallap síkjának S_1-gyel alkotott metszésvonalát p-vel. Mivel ez az oldallap téglalap, azért p merőleges PR-re. Hasonlóan legyen q a QR-hez csatlakozó oldallap síkjának és S_1-nek a metszésvonala, q merőleges QR-re. Megmutatjuk, hogy p és q a PQ szakasz F felező merőleges síkjára nézve tükrösen helyezkedik el (2. ábra).



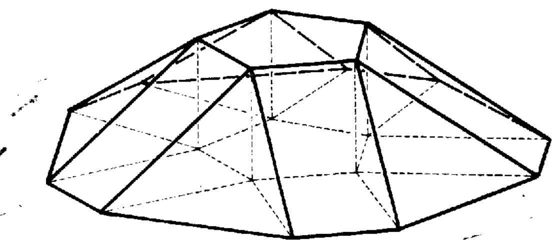
2. ábra

A PR egyenes nem lehet merőleges S_1-re, hiszen nem merőleges az S_1-beli PQ egyenesre. Így S_1-ben csak egy, a P-n átmenő, PR-re merőleges egyenes van. Tükrözzük az S_1-ből, H-ból és q-ból álló alakzatot F-re. Ekkor S_1 és H önmagába megy át, q képe pedig olyan egyenes, amely átmegy P-n és merőleges PR-re. Mivel ilyen csak egy van, azért q képe csak p lehet, állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

Ha H síkja merőleges S_1-re, p és q párhuzamosak, és párhuzamos velük a H-hoz PR-ben és QR-ben csatlakozó lapok síkjának r metszésvonala is. Ez az r egyenes benne van S_2-ben és a konvexség miatt T-nek az S_2-n levő bármely további csúcsa csak r-en lehet rajta. Emiatt T-nek egyetlen további csúcsa van S_2-n, legyen ez R_1, és legyen P_1 és Q_1 a PRR_1, QRR_1 háromszöget téglalappá kiegészítő pont. Ez a PQR alapú; egységnyi magasságú test az egyetlen olyan test, amelyike eleget tesz a feladat követelményeinek, és amelynek van S_1-re merőleges háromszög alakú oldallapja. Mivel két csúcsa van S_2-n, azért ezt a testet T_2-vel jelöljük (3a ábra).



3a. ábra



3b. ábra

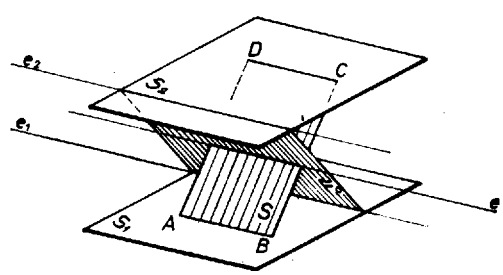
Ha H nem merőleges S_1-re, akkor az R csúcsának az S_1-en levő R_1 merőleges vetülete a PQ szakasz felezőpontjától különböző pont. Ismeretes, hogy $R_1P \perp p$ és $R_1Q \perp q$, tehát p és q is metszi egymást, a metszéspontjuk, M rajta van az F síkon, és a PR_1Q háromszöget deltoiddá egészíti ki. H tehát „elhajlik" M-től, S_1-en levő árnyéka a PQ egyenes M-mel ellentétes oldalára esik. Magának a T testnek is ezen az oldalon kell lennie, hiszen konvexitása miatt minden csúcsa a H síkjának ugyanazon az oldalán van, és a H-hoz csatlakozó téglalapok csúcsai nem lehetnek H-nak az M felé eső oldalán, hiszen az MRP és MRQ szögek hegyesszögek, így ezeket a téglalapokat nem lehet az MRP, MRQ síkrészeken elhelyezni. (Ha T nem volna konvex, akkor e téglalapok úgyis elhelyezkedhetnének, hogy egyikük H-nak az M felé eső, másikuk az M-mel ellentétes oldalán van. Ilyen részlet található az 1. ábrán.) Ezzel beláttuk, hogy

a) T-nek a háromszög alakú lapjai a két párhuzamos sík közül ahhoz hajlanak hegyes szögben, amelyiken két csúcsuk van;

b) az egymáshoz csatlakozó háromszögek és téglalapok S_1-gyel párhuzamos élei nem alkothatnak hegyes szöget (mert például a 2. ábrán a PR-hez csatlakozó téglalapnak az S_1-en levő további csúcsa MP-nek a P-n túli meghosszabbításán van).

c) a háromszög alakú oldallapokhoz csatlakozó téglalapok e háromszögeknek az S_1-re merőleges szimmetriasíkjára nézve szimmetrikusan helyezkednek el.

2. Legyen $ABCD$ a T testnek valamely téglalap alakú oldallapja, az A, B csúcsok legyenek S_1-en, C és D pedig S_2-n. Jelöljük F_0-lal a BC és DA szakaszok közös felező merőleges síkját, ebben van benne a BC-hez, illetve DA-hoz csatlakozó háromszög–lapok E, illetve F csúcsa. Így F_0 metszi az S_1, S_2 síkok közül legalább az egyiket, de akkor S_1 és S_2 párhuzamos volta miatt a másikat is metszi, és a két metszésvonal párhuzamos. Jelöljük ezeket e_1-gyel és e_2-vel, F_0 és az $ABCD$ lap S síkjának a metszésvonalát e-vel (4. ábra).



4. ábra

Nyilván e is párhuzamos e_1-gyel és e_2-vel, és e elválasztja egymástól ezt a két egyenest. Emiatt elválasztja egymástól S is az e_1 és e_2 egyeneseket, tehát T-nek nem lehet e_1-en is, és e_2-n is csúcsa. Tegyük fel, hogy e_2-n nincs csúcsa T-nek, tehát E és F az e_1-en van. Az $ABEF$ négyszögben AB párhuzamos EF-fel, $BE = AF$, és az előző pont szerint az A-beli és a B-beli szög nem lehet hegyesszög. Tehát $ABEF$ szimmetrikus trapéz. Ezzel beláttuk, hogy

a) az ugyanahhoz a téglalaphoz csatlakozó háromszögeknek S_1 és S_2 közül ugyanabban van a hátralevő csúcsuk;

b) a téglalap alakú oldallapokhoz csatlakozó két–két háromszög a téglalapnak az S_1-re merőleges szimmetriasíkjára nézve tükrösen helyezkedik el.

3. Az előző pont *a)* megállapításából T-t mintegy körbejárva kapjuk, hogy a háromszög alakú oldallapok mindegyikének S_1 és S_2 közül ugyanabban van két csúcsa, legyen ez mondjuk S_1. Eszerint ha a T test S_2-beli csúcsainak a számát n-nel jelöljük, akkor T-nek S_1-ben $2n$ csúcsa van. Könnyű látni, hogy n értéke nem lehet 1, tehát T-nek

S_1-ben valódi lapja van, jelöljük ezt A_{2n}-nel, és jelöljük T-nek az S_2-ben levő részét F_n-nel: ha $n = 2$, akkor F_n csak egy szakasz, különben F_n is lapja T-nek. Az 1. pont *c)* megállapításából és a 2. pont *b)* megállapításából következik, hogy A_{2n} szögei egyenlőek. Ebből már könnyen bizonyítható, hogy ha $n > 2$, akkor F_n szabályos n-szög (3b ábra). Az 1. pont *a)* megállapítása szerint, ha F_n csúcsait S_1-re vetítjük, a vetületek benne lesznek A_{2n}-ben.

Jelöljük F területét f_n-nel, a téglalap és háromszög alakú oldallapok S_1-en levő vetületének a területét t_n-nel és h_n-nel, a test magasságát λ_n-nel. Ekkor az S_2-től $x \cdot \lambda_n$ távolságra levő, S_2-vel párhuzamos sík a testből

$$t_n(x) = f_n + xnt_n + x^2nh_n$$

területű idomot vág ki, tehát a test térfogata

$$V_n = \lambda_n \int_0^1 t_n(x)dx = \lambda_n \int_0^1 (f_n + xnt_n + x^2nh_n)dx =$$
$$= \lambda_n \left(f_n + \frac{n}{2} \cdot t_n + \frac{n}{3} \cdot h_n \right).$$

Könnyen látható, hogy

$$f_n = \frac{n}{4} \cdot \mathrm{ctg}\frac{\pi}{n}, \quad \lambda_n = \sqrt{4 - \frac{1}{\sin^2 \pi/n}},$$
$$t_n = \frac{1}{\sin \pi/n}, \qquad h_n = \mathrm{ctg}\pi/n,$$

és hogy, amint az λ_n fenti alakjából is kiolvasható, $n < 6$. Az $n = 1, 2, 3, 4, 5$ esetekben a feladat követelményeinek eleget tevő testet kapunk, és ezek térfogata

$$V_2 = \sqrt{3} = 1{,}732, \qquad V_3 = \frac{19\sqrt{2}}{6} = 4{,}478,$$
$$V_4 = 4 + \frac{7\sqrt{2}}{3} = 7{,}300, \qquad V_5 = \frac{35}{12} + \frac{31\sqrt{5}}{12} = 8{,}693.$$

Ezzel a megoldást befejeztük.