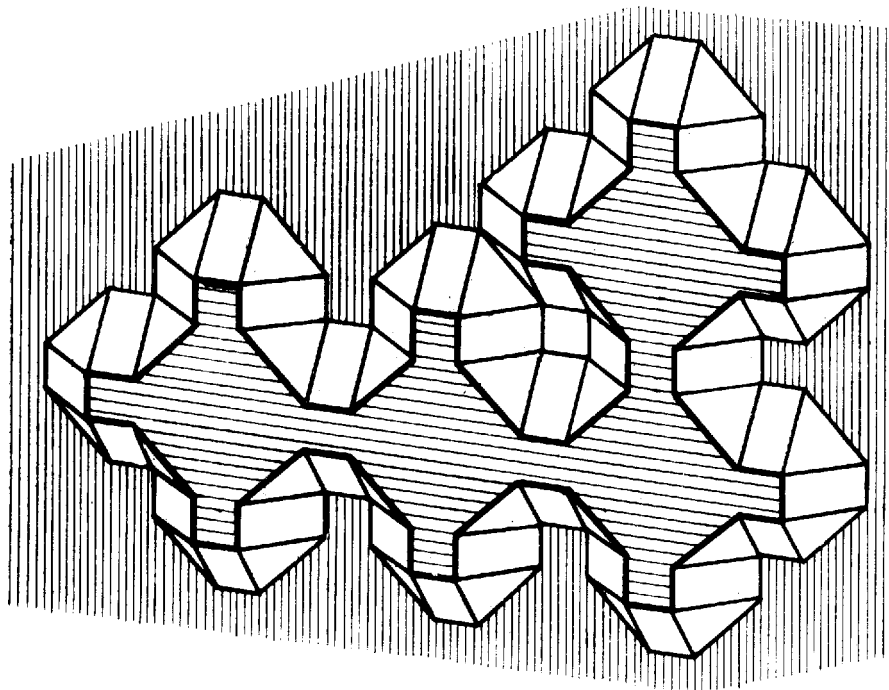
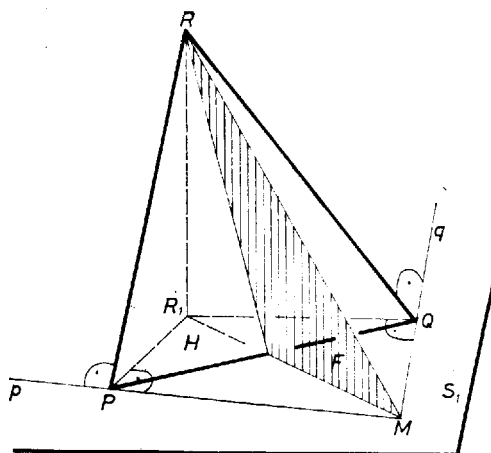


A kérdés kissé szokatlan feltevése – a „lehet” szóval – azt sejteti, hogy a válasz nem egyértelmű, több ilyen test van, és a térfogatuk természetesen más és más. Ezért először azt fogjuk megvizsgálni, melyek azok a testek, amelyekre ráillik a feladatbeli leírás. Külön figyelmet fordítunk azokra a megoldásokra, amelyekben a konvexséget használjuk fel, mert a versenyzők ezeket a részeket elnagyolták, „ösztönösen” jól alakították ki a testeket, de nem mutatták meg, hogy miért kell ezeknek a testeknek éppen olyanoknak lenniük, mint amilyenek, és így nem bizonyították be, hogy az általuk adott értékek a feladat összes megoldásai. Egy pillantás az 1. ábrára meggyőz arról, hogy ha a konvexséget nem tennénk fel, akkor végtelen sok test felelne meg a követelményeknek.



1. ábra

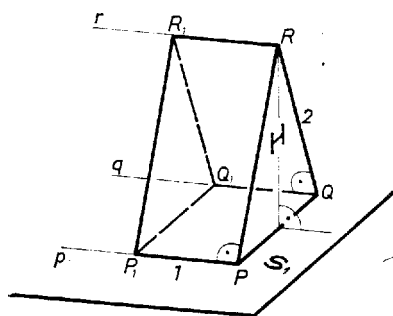
1. Állítsuk képzeletben vízszintesre azokat a párhuzamos síkokat, amelyek a vizsgált T test csúcsait hordozzák, és jelöljük őket S_1 -gyel és S_2 -vel. Nevezzük a testnek az S_1 és S_2 közötti lapjait oldallapoknak, és legyen H a T tetszőleges háromszög alakú oldallapja. Tegyük fel, hogy H -nak S_1 -ben két csúcsa van, jelöljük ezeket P -vel, Q -val, és legyen R a harmadik csúcs. Jelöljük a H -hoz PR -ben csatlakozó oldallap síkjának S_1 -gyel alkotott metszésvonalát p -vel. Mivel ez az oldallap téglalap, azért p merőleges PR -re. Hasonlóan legyen q a QR -hez csatlakozó oldallap síkjának és S_1 -nek a metszésvonala, q merőleges QR -re. Megmutatjuk, hogy p és q a PQ szakasz F felező merőleges síkjára nézve tükrösen helyezkedik el (2. ábra).



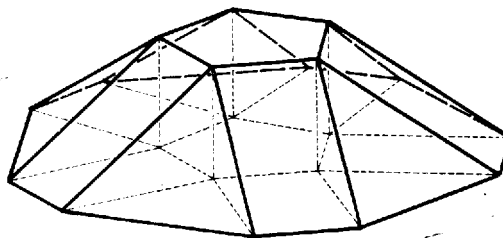
2. ábra

A PR egyenes nem lehet merőleges S_1 -re, hiszen nem merőleges az S_1 -beli PQ egyenesre. Így S_1 -ben csak egy, a P -n átmenő, PR -re merőleges egyenes van. Tükrözzük az S_1 -ből, H -ból és q -ból álló alakzatot F -re. Ekkor S_1 és H önmagába megy át, q képe pedig olyan egyenes, amely átmegy P -n és merőleges PR -re. Mivel ilyen csak egy van, azért q képe csak p lehet, állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

Ha H síkja merőleges S_1 -re, p és q párhuzamosak, és párhuzamos velük a H -hoz PR -ben és QR -ben csatlakozó lapok síkjának r metszészvonala is. Ez az r egyenes benne van S_2 -ben és a konvexitás miatt T -nek az S_2 -n levő bármely további csúcsa csak r -en lehet rajta. Emiatt T -nek egyetlen további csúcsa van S_2 -n, legyen ez R_1 , és legyen P_1 és Q_1 a PRR_1 , QRR_1 háromszöget téglalappá kiegészítő pont. Ez a PQR alapú; egységnyi magasságú test az egyetlen olyan test, amelyike eleget tesz a feladat követelményeinek, és amelynek van S_1 -re merőleges háromszög alakú oldallapja. Mivel két csúcsa van S_2 -n, azért ezt a testet T_2 -vel jelöljük (3a ábra).



3a. ábra

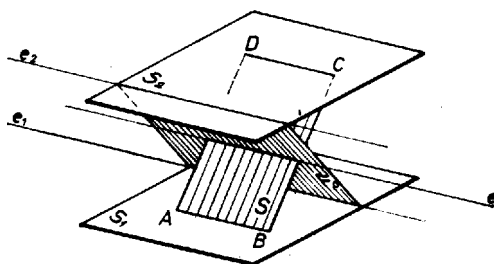


3b. ábra

Ha H nem merőleges S_1 -re, akkor az R csúcsának az S_1 -en levő R_1 merőleges vetülete a PQ szakasz felezőpontjától különböző pont. Ismeretes, hogy $R_1P \perp p$ és $R_1Q \perp q$, tehát p és q is metszi egymást, a metszéspontjuk, M rajta van az F síkon, és a PR_1Q háromszöget deltoiddá egészíti ki. H tehát „elhajlik” M -től, S_1 -en levő árnyéka a PQ egyenes M -mel ellentétes oldalára esik. Magának a T testnek is ezen az oldalon kell lennie, hiszen konvexitása miatt minden csúcsa a H síkjának ugyanazon az oldalán van, és a H -hoz csatlakozó téglalapok csúcsai nem lehetnek H -nak az M felé eső oldalán, hiszen az MRP és MRQ szögek hegyesszögek, így ezeket a téglalapokat nem lehet az MRP , MRQ síkrészekeken elhelyezni. (Ha T nem volna konvex, akkor e téglalapok úgyszólván elhelyezkedhetnének, hogy egyikük H -nak az M felé eső, másikuk az M -mel ellentétes oldalán van. Ilyen részlet található az 1. ábrán.) Ezzel beláttuk, hogy

- T -nek a háromszög alakú lapjai a két párhuzamos sík közül ahhoz hajlanak hegyes szögben, amelyiken két csúcsuk van;
- az egymáshoz csatlakozó háromszögek és téglalapok S_1 -gyel párhuzamos élei nem alkothatnak hegyes szöveget (mert például a 2. ábrán a PR -hez csatlakozó téglalaphoz az S_1 -en levő további csúcsa MP -nek a P -n túli meghosszabbításán van).
- a háromszög alakú oldallapokhoz csatlakozó téglalapok e háromszögeknek az S_1 -re merőleges szimmetriasíkjára nézve szimmetrikusan helyezkednek el.

2. Legyen $ABCD$ a T testnek valamely téglalap alakú oldallapja, az A , B csúcsok legyenek S_1 -en, C és D pedig S_2 -n. Jelöljük F_0 -lal a BC és DA szakaszok közös felező merőleges síkját, ebben van benne a BC -hez, illetve DA -hoz csatlakozó háromszög-lapok E , illetve F csúcsa. Így F_0 metszi az S_1 , S_2 síkok közül legalább az egyiket, de akkor S_1 és S_2 párhuzamos volta miatt a másikat is metszi, és a két metszészvonal párhuzamos. Jelöljük ezeket e_1 -gyel és e_2 -vel, F_0 és az $ABCD$ lap S síkjának a metszészvonalát e -vel (4. ábra).



4. ábra

Nyilván e is párhuzamos e_1 -gyel és e_2 -vel, és e elválasztja egymástól ezt a két egyenest. Emiatt elválasztja egymástól S is az e_1 és e_2 egyeneseket, tehát T -nek nem lehet e_1 -en is, és e_2 -n is csúcsa. Tegyük fel, hogy e_2 -n nincs csúcsa T -nek, tehát E és F az e_1 -en van. Az $ABEF$ négyszögben AB párhuzamos EF -fel, $BE = AF$, és az előző pont szerint az A -beli és a B -beli szög nem lehet hegyesszög. Tehát $ABEF$ szimmetrikus trapéz. Ezzel beláttuk, hogy

- az ugyanahhoz a téglalaphoz csatlakozó háromszögeknek S_1 és S_2 közül ugyanabban van a hátralevő csúcsuk;
- a téglalap alakú oldallapokhoz csatlakozó két-két háromszög a téglalaphoz az S_1 -re merőleges szimmetriasíkjára nézve tükrösen helyezkedik el.

3. Az előző pont a) megállapításából T -t mintegy körbejárva kapjuk, hogy a háromszög alakú oldallapok mind-egyikének S_1 és S_2 közül ugyanabban van két csúcsa, legyen ez mondjuk S_1 . Eszerint ha a T test S_2 -beli csúcsainak a számát n -nel jelöljük, akkor T -nek S_1 -ben $2n$ csúcsa van. Könnyű látni, hogy n értéke nem lehet 1, tehát T -nek

S_1 -ben valódi lapja van, jelöljük ezt A_{2n} -nel, és jelöljük T -nek az S_2 -ben levő részét F_n -nel: ha $n = 2$, akkor F_n csak egy szakasz, különben F_n is lapja T -nek. Az 1. pont *c)* megállapításából és a 2. pont *b)* megállapításából következik, hogy A_{2n} szögei egyenlőek. Ebből már könnyen bizonyítható, hogy ha $n > 2$, akkor F_n szabályos n -szög (3b ábra). Az 1. pont *a)* megállapítása szerint, ha F_n csúcsait S_1 -re vetítjük, a vetületek benne lesznek A_{2n} -ben.

Jelöljük F területét f_n -nel, a téglalap és háromszög alakú oldallapok S_1 -en levő vetületének a területét t_n -nel és h_n -nel, a test magasságát λ_n -nel. Ekkor az S_2 -től $x \cdot \lambda_n$ távolságra levő, S_2 -vel párhuzamos sík a testből

$$t_n(x) = f_n + xnt_n + x^2nh_n$$

területű idomot vág ki, tehát a test térfogata

$$\begin{aligned} V_n &= \lambda_n \int_0^1 t_n(x) dx = \lambda_n \int_0^1 (f_n + xnt_n + x^2nh_n) dx = \\ &= \lambda_n \left(f_n + \frac{n}{2} \cdot t_n + \frac{n}{3} \cdot h_n \right). \end{aligned}$$

Könnnyen látható, hogy

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{n}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, & \lambda_n &= \sqrt{4 - \frac{1}{\sin^2 \pi/n}}, \\ t_n &= \frac{1}{\sin \pi/n}, & h_n &= \operatorname{ctg} \pi/n, \end{aligned}$$

és hogy, amint az λ_n fenti alakjából is kiolvasható, $n < 6$. Az $n = 1, 2, 3, 4, 5$ esetekben a feladat követelményeinek eleget tevő testet kapunk, és ezek térfogata

$$\begin{aligned} V_2 &= \sqrt{3} = 1,732, & V_3 &= \frac{19\sqrt{2}}{6} = 4,478, \\ V_4 &= 4 + \frac{7\sqrt{2}}{3} = 7,300, & V_5 &= \frac{35}{12} + \frac{31\sqrt{5}}{12} = 8,693. \end{aligned}$$

Ezzel a megoldást befejeztük.